

CAGNOLI

**Résolution trigonométrique des équations
du second, troisième et quatrième degré**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 374-381

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9_374_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**RESOLUTION TRIGONOMETRIQUE DES ÉQUATIONS DU SECOND,
TROISIÈME ET QUATRIÈME DEGRÉ;**

D'APRÈS CAGNOLI.

DEUXIÈME DEGRÉ.

1. Formes des équations :

- | | |
|-----|------------------|
| (1) | $x^2 + px = q,$ |
| (2) | $x^2 - px = q,$ |
| (3) | $x^2 + px = -q,$ |
| (4) | $x^2 - px = -q.$ |

(*) A lire cet article après celui qui finit page 97.

(375)

Dans ces quatre formes, p et q sont des quantités positives.

2. *Première forme :*

$$x = -\frac{1}{2}p \left[1 \mp \left(1 + \frac{4q}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Posons

$$\text{tang } A = \frac{2\sqrt{q}}{p};$$

on trouve

$$x = \sqrt{q} \cdot \text{tang } \frac{1}{2} A, \quad x = -\sqrt{q} \cdot \cot \frac{1}{2} A.$$

3. *Deuxième forme.* Faisant $x = -y$, on revient à la première forme.

4. *Troisième forme :*

$$x = -\frac{1}{2}p \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} \right].$$

Premier cas. *Racines réelles.* Faisons

$$\sin A = \frac{2\sqrt{q}}{p}, \quad x = -q^{\frac{1}{2}} \text{tang } \frac{1}{2} A, \quad x = -q^{\frac{1}{2}} \cot \frac{1}{2} A.$$

5. *Exemple :*

$$x^2 + \frac{7}{44}x = \frac{1695}{12716},$$

$$x = \text{tang } \frac{1}{2} A \sqrt{\frac{1695}{12716}}.$$

$$\log 1695 = 3,2291697$$

$$\log 12716 = 5,8956495$$

$$\text{somme} = 9,1248192$$

$$\text{demi-somme} = 9,5624096$$

(376)

$$\log 88 = 1,94448267$$

$$\text{compl log } 7 = 9,15490196$$

$$\log \text{ tang } A = 0,6617942 = \log \text{ tang } 77^{\circ} 42' 31'', 72$$

$$\log \text{ tang } \frac{1}{2} A = 9,9061115$$

$$\text{demi-somme} = 9,5624096$$

$$\log x = 9,4685211 = \log 0,2941176$$

$$\text{compl log} = -0,5314789 = \log \frac{1}{3,4} = \log \frac{5}{17}$$

$$x = \frac{5}{17}.$$

Second cas. *Racines imaginaires.* Ces racines ont la forme

$$a \pm bi = a \left(1 \pm \frac{b}{a} i \right) = a (1 + i \text{ tang } A)$$

$$= \frac{a}{\cos A} (\cos A + i \sin A) = \frac{b}{\sin A} (\cos A \pm i \sin A) = \frac{bc^{\pm iA}}{\sin A}.$$

6. *Quatrième forme.* Faisant $x = -y$, on revient à la précédente forme.

TROISIÈME DEGRÉ.

I.

Il y a quatre formes à une racine réelle et deux à trois racines réelles.

Formes à une seule racine réelle.

Première forme:

$$x^3 + px + q = 0,$$

$$y^3 = -\frac{1}{2} q \left[1 + \left(1 + \frac{4p^3}{27q^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

$$z^3 = -\frac{1}{2} q \left[1 - \left(1 + \frac{4p^3}{27q^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right];$$

(377)

$$(1) \quad \text{tang}^2 B = \frac{4p^3}{27q^2} = \frac{p^2}{9q^2} R^2, \quad p = \frac{3}{4} R^2,$$

$$\text{tang} B = \frac{R^3}{4q}, \quad q = \frac{R^3}{4 \text{tang} B},$$

$$x = -\frac{R}{2} \left(\cot^{\frac{1}{3}} B - \text{tang}^{\frac{1}{3}} B \right),$$

$$(2) \quad \text{tang} A = \text{tang}^{\frac{1}{3}} \frac{B}{2},$$

$$(3) \quad x = -R \cdot \cot 2A = -2 \sqrt{\frac{1}{3} p} \cot 2A.$$

Ainsi, on peut calculer x par *logarithmes*, au moyen des trois équations (1), (2), (3).

Deuxième forme :

$$x^3 + px - q \quad \text{et} \quad 4p^3 < 27q^2;$$

on fait

$$(1) \quad \text{tang}^2 B = \frac{4p^3}{27q^2},$$

$$(2) \quad \text{tang} A = \text{tang}^{\frac{1}{3}} \frac{B}{2},$$

$$(3) \quad x = -2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2A.$$

Troisième forme :

$$x^3 - px + q = 0 \quad \text{et} \quad 4p^3 < 27q^2;$$

$$(1) \quad \sin^2 B = \frac{4p^3}{27q^2},$$

$$(2) \quad \text{tang} A = \text{tang}^{\frac{1}{3}} \frac{B}{2},$$

$$(3) \quad x = -\frac{2 \sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2A}.$$

Quatrième forme :

$$(1) \quad \begin{aligned} x^3 - px - q &= 0; \\ \sin^2 B &= \frac{4q^3}{27q^2}, \end{aligned}$$

$$(2) \quad \text{tang } A = \text{tang}^{\frac{1}{3}} \frac{B}{2},$$

$$(3) \quad x = \frac{2\sqrt[3]{\frac{p}{3}}}{\sin 2A}.$$

II.

Cas irréductibles. — Trois racines réelles.

Lemme. On a l'équation

$$\sin^3 A - \frac{3}{4} R^2 \sin A + \frac{1}{4} R^2 \sin 3A = 0;$$

les sinus sont pris dans le cercle dont le rayon est R. $\sin 3A$ étant connu, les trois racines sont

$$\sin A, \quad \sin(60^\circ - A), \quad \sin(60^\circ + A).$$

Première forme :

$$x^3 - px + q = 0, \quad 4p^3 \geq 27q^2;$$

$$p = \frac{3}{4} R^2, \quad R = 2\sqrt{\frac{p}{3}},$$

$$q = \frac{R^2}{4} \sin 3A = \frac{p}{3} \sin 3A,$$

$$\sin 3A = \frac{3q}{p},$$

$$x = \sin A,$$

dans le cercle dont le rayon est R :

$$x = R \sin A = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin A,$$

(379)

$$x = 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \sin(60^\circ - A),$$

$$x = -2 \sqrt{\frac{p}{3}} \sin(60^\circ + A),$$

le rayon étant égal à l'unité.

Seconde forme :

$$x^3 - px - q = 0, \quad 4p^3 > 27q^2 \quad \text{ou} \quad = 27q^2;$$

comme ci-dessus,

$$\sin 3A = \frac{3q}{p} \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1}{3}p}},$$

$$x = -\sin A \cdot 2 \sqrt{\frac{1}{3}p},$$

$$x = -\sin(60^\circ - A) \cdot 2 \sqrt{\frac{1}{3}p},$$

$$x = \sin(60^\circ + A) \cdot 2 \sqrt{\frac{1}{3}p},$$

le rayon étant égal à l'unité.

Observation. Les équations trigonométriques relatives à la multiplication d'un arc donnent les racines des équations algébriques qui sont susceptibles d'être identifiées avec les équations trigonométriques. C'est ainsi que Viète a résolu une équation du quarante-cinquième degré.

Cas irréductible. — Exemple numérique (Cagnoli, deuxième édition, page 225).

$$x^3 - \frac{403}{441}x + \frac{46}{147} = 0,$$

$$\sin 3A = \frac{414}{403} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1612}{1325}}},$$

$$x = \sin A \cdot \sqrt{\frac{1612}{1325}},$$

(380)

$$x = \sin(60^\circ - A) \sqrt{\frac{1612}{1325}},$$

$$x = -\sin(60^\circ + A) \sqrt{\frac{1612}{1325}}.$$

$$\log 1612 = 3,2073650$$

$$\text{compl log } 1325 = 6,8784402$$

$$\text{somme} = 0,0858052$$

$$\text{demi-somme} = 0,0429029 \text{ log const.}$$

$$\text{compl log const.} = 9,9570974$$

$$\log 414 = 2,61700034$$

$$\text{compl log } 403 = 7,39469495$$

$$\log \sin 3A = 9,9687927 = \log \sin 68^\circ 32' 18'',55$$

$$\log \sin A = 9,5891206$$

$$\log \text{const.} = 0,0429026$$

$$\log x = 9,6320232 = \log 0,4285714$$

$$\text{compl log } x = -0,3679768 = \log \frac{1}{2,33333} = \log \frac{3}{7},$$

$$x = \frac{3}{7}.$$

$$\log \sin(60^\circ - A) = 9,7810061$$

$$\log \text{const.} = 0,0429026$$

$$\log x = 9,8239087 = \log 0,6666666 = \log \frac{2}{3}.$$

$$x = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{7} = \frac{23}{21};$$

donec

$$x = -\frac{23}{21}.$$

QUATRIÈME DEGRÉ.

On ne peut résoudre trigonométriquement que la réduite qui est du troisième degré.

Note historique. Cagnoli (Antoine), né à Zante, en 1743, fils du chancelier de la république de Venise, étudia avec succès le grec et diverses parties de la philosophie. Il habita longtemps Vérone et y a formé, à ses frais, un observatoire dans sa maison; fut nommé, en 1798, professeur à l'École militaire de Modène, et est mort le 6 août 1818.

Ses principaux ouvrages sont :

1°. *Trigonometria plana et spherica.*

Il a publié cet ouvrage en italien et en français, en 1786, pendant un séjour qu'il fit à Paris. Une seconde édition, beaucoup améliorée, a paru, à Bologne, en 1804; c'est cette seconde édition que M. Chompré (N.-M.) a traduite en 1808; in-4°; Courcier.

C'est encore la Trigonométrie la plus complète, la plus scientifique que nous possédions; véritable ouvrage de bibliothèque (*).

2°. *Traité des sections coniques.*

3°. *Mémoire sur la figure de la Terre* (tome VI des *Transactions de la Société italienne.*) Cagnoli était, depuis 1808, président de cette Société.

Chompré (N.-M.), traducteur de la Trigonométrie, né, à Paris, le 23 septembre 1750, et mort, à Ivry-sur-Seine, le 24 juillet 1825, a traduit le Mémoire de Cavendish sur la Densité de la Terre (*Journal de l'École Polytechnique*, tome X, 1815); il a appartenu à une famille de littérateurs.

(*) Nous ne connaissons pas encore la Trigonometrie de M. Serret, ouvrage dig ne sans doute de la position scientifique du célèbre auteur.