Nouvelles annales de mathématiques

Adville

Examen d'un cas singulier qui se présente dans la division abrégée en usage

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 100-103

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__100_0>

EXAMEN D'UN CAS SINGULIER QUI SE PRÉSENTE DANS LA DIVISION ABRÉGÉE EN USAGE;

PAR M. ADVILLE,
Licencié ès sciences.

1. On sait comment, lorsqu'on a deux nombres décimaux à diviser l'un par l'autre, on peut déterminer, à la seule inspection de ces nombres, l'espèce des unités de l'ordre le plus élevé du quotient. On sait aussi que, si l'on veut avoir le quotient de deux nombres décimaux à une unité près, par défaut ou par excès, il suffit de conserver au diviseur un chiffre de plus que n'en doit avoir le quotient, et au dividende les chiffres placés à gauche de la virgule, après qu'on l'aura avancée ou reculée d'autant de rangs que celle du diviseur. Soient, en effet, A et B le dividende et le diviseur conservés, $A+\alpha$ et $B+\beta$ le dividende et le diviseur complets. α et β sont des fractions plus petites que l'unité, et l'on a identiquement

$$A = BQ + R,$$

d'où

$$A+\alpha = (B+\beta)Q - \beta Q + (R+\alpha),$$

$$\frac{A+\alpha}{B+\beta} = Q - \frac{\beta Q}{B+\beta} + \frac{R+\alpha}{B+\beta}.$$

Mais

$$Q < B, \quad \beta < 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{\beta Q}{B+\beta} < 1;$$

$$R+1 < B, \quad R+\alpha < B, \quad \text{d'où} \quad \frac{R+\alpha}{B+\beta} < 1.$$

L'application simultanée de cette règle et de celle qui donne à priori le nombre des chiffres du quotient, conduit quelquefois à une contradiction apparente, qu'on résout de la manière la plus heureuse en faisant voir que tous les chiffres du quotient sont alors des neuf.

Exemple. Soit à diviser 235745287,41 par 235766,179. Le quotient doit avoir trois chiffres, et, pour l'avoir à une unité près, il suffit de diviser 2357452 par 2357. On voit immédiatement que le quotient entier de ces deux nombres, que j'appellerai Q', aura quatre chiffres; mais il ne peut pas être plus grand que 1000. Car sans cela on aurait, par la règle qui donne le nombre des chiffres du quotient cherché,

$$Q < 1000,$$

et, par la seconde,

$$Q > Q' - 1,$$

inégalités qui seraient contradictoires; ce qui est impossible, parce qu'aucune des règles ne souffre d'exception. On a donc

$$Q' = 1000,$$

et

$$Q < 1000,$$
$$Q > 1000 - 1, \quad \text{ou} \quad 999.$$

D'où il suit que 1000 est le quotient cherché, à une unité près par excès, tandis que 999 représente le même quotient, à une unité près par défaut.

Il ne faut pas croire pourtant que toutes les fois que les chiffres du quotient seront tous des neuf, on en sera averti immédiatement comme dans l'exemple précédent. Soit, en effet, à diviser 23399,86543 par 23,4125. Le quotient devant avoir trois chiffres, il suffit, pour l'obtenir à une unité près, de diviser 2339986 par 2341; or, le quotient de cette division n'a que trois chiffres, lesquels sont tous des neuf.

2. Dans la divison abrégée proprement dite, on con-

serve généralement au diviseur deux chiffres de plus que n'en doit avoir le quotient. Et comme après chaque chiffre du quotient obtenu, on barre un chiffre au diviseur, il en résulte que le diviseur employé à la recherche d'un chiffre du quotient a toujours deux chiffres de plus, et non davantage, qu'il en reste à trouver. Cela posé, soient n le nombre des chiffres du quotient, p le nombre des chiffres obtenus par la méthode abrégée, et r_p le reste de la dernière division effectuée. On a

$$d_{(p-1)} > r_p,$$

en appelant $d_{(p-1)}$ le diviseur correspondant à r_{p-1}. Si l'on suppose qu'en barrant le dernier chiffre de d_{p-1}, on trouve

$$r_p > d_{p-1} \times 10,$$

on rencontrera précisément le cas singulier que je me suis proposé d'examiner.

Supposons qu'au lieu de barrer le dernier chiffre de d_{p-1}, on conserve ce diviseur, et qu'on achève la division à la manière ordinaire, c'est-à-dire en abaissant successivement un chiffre à la droite de r_p et des restes suivants. On obtiendra ainsi $n-p$ chiffres dont je représenterai l'ensemble par q', tandis que j'appellerai q l'ensemble des chiffres obtenus par la méthode abrégée.

$$q \times 10^{n-p} + q'$$

sera le quotient cherché à une unité près; car il est facile de voir que la démonstration synthétique de la division abrégée, qui se trouve aujourd'hui partout, s'applique à fortiori au cas où l'on achève l'opération par le procédé ordinaire de la division.

Toute la question est donc de trouver, à une unité près, le quotient q qui doit avoir $n-p$ chiffres. Et il suffit pour cela, comme nous l'avons démontré, de conserver au diviseur $n-p+1$ chiffres; mais d_{p-1} en a $n-p+3$: on peut, par conséquent, en barrer un (et même deux); et si l'on trouve, après cette suppression, que les unités de l'ordre le plus élevé du quotient q' sont de l'ordre $n-p+1$, c'est que ce quotient est, à une unité près, 10^{n-p} par excès, ou $10^{n-p}-1$ par défaut, c'est-à-dire que le quotient cherché est

$$q \times 10^{n-p} + 10^{n-p} - 1.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

On verrait de la même manière que, si l'on rencontrait ce cas singulier en cherchant le premier chiffre du quotient, on pourrait affirmer que le chiffre des dixièmes est un neuf, et qu'il en serait de même pendant tout le cours de l'opération, si, au lieu de conserver au diviseur d'entrée deux chiffres de plus seulement que n'en doit avoir le quotient, on en conservait trois, etc., etc. (la somme des chiffres du quotient étant toujours plus petite que cent).