Nouvelles annales de mathématiques

L. Gisclard

Sur la limite supérieure des racines positives d'une équation

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 107-108

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__107_0>

SUR LA LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES POSITIVES D'UNE ÉQUATION;

PAR M. L. GISCLARD,
Professeur au lycée de Toulouse.

THÉORÈME. *$y = f(x) = 0$ étant une équation du degré m, si $x = x_0$ donne pour $f(x)$ et ses différences, des résultats tous positifs y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0, \ldots, \Delta^{m-1} y_0$, je dis qu'on aura une limite supérieure des racines positives de l'équation, en prenant*

$$x = x_0 + (m-1).$$

Démonstration. Ce théorème est une conséquence de la formule fondamentale du calcul aux différences finies

$$y_z = f(x_0 + z) = y_0 + \frac{z}{1}\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{1.3}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{z(z-1)\ldots[z-(m-1)]}{1.2\ldots m}\Delta^m y_0.$$

Remarquons d'abord que les deux membres étant du degré m par rapport à z, cette formule sera vérifiée pour toutes les valeurs de z, puisqu'elle est déjà vérifiée par les valeurs entières. Si donc y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0, \ldots, \Delta^{m-1} y_0$ sont positifs, il est évident que si l'on prend $z = m - 1$ ou une valeur plus grande, le second membre, et par suite $f(x_0 + z)$ sera positif; car les différents coefficients seront tous positifs. Si l'on prend $z < m - 1$, un des coefficients au moins devenant négatif, on n'est plus sûr que $f(x_0 + z)$ soit positif.

On peut faire voir, du reste facilement, que lorsqu'on fait décroître indéfiniment l'intervalle des substitutions, le théorème précédent conduit à la limite des racines positives de Newton. En effet, prenons la formule générale

$$f(x_0 + nh) = y_0 + \frac{n}{1}\delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\delta^3 y_0 + \ldots;$$

δy_0, $\delta^2 y_0$, $\delta^3 y_0$, ... relatifs à l'intervalle h varieront avec h; on peut écrire le second membre sous la forme

$$y_0 + nh \cdot \frac{\delta y_0}{h} + \frac{n^2 h^2}{1.2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\delta^2 y_0}{h^2} + \frac{n^3 h^3}{1.2.3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\delta^3 y_0 + \ldots + \frac{n^m h^m}{1.2\ldots m}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - m - 1\right)\delta^m y_0.$$

Faisons maintenant décroître h et croître n, mais de manière à ce que nh soit constant; on aura, quand on supposera h infiniment petit,

$$f(x_0 + k) = y_0 + kf'(0) + \frac{k^2}{1.2}f''(0) + \ldots + \frac{k^m}{1.2.m}f^m(0),$$

ce qui nous conduit à la limite de Newton.