PEPIN

Solution de la question 136

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 154-158

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__154_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 136

(voir t V p 672),

PAR M. L'ABBÉ PEPIN,

Du petit seminaire d'Iseure

Construire le quadrilatère dont on connaît : 1° une diagonale; 2° les angles qui ont leurs sommets aux extrémités de cette diagonale; 3° les projections des deux autres sommets sur cette diagonale. Discuter le cas particulier où les angles sont droits. (PIOBERT.)

1. Soient b et b', c et c' les segments additifs ou soustractifs de la diagonale AD, déterminés respectivement par les projections B′ et C′ des sommets opposés B et C. Soient α et α' les angles donnés, β et β' les parties de ces angles situées du même côté de la diagonale que le sommet B. Ce sommet une fois déterminé, le quadrilatère se résoudra sans difficulté. Or on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} BB' = b \operatorname{tang} \beta = b' \operatorname{tang} \beta', \\ CC' = c \operatorname{tang}(\alpha - \beta) = c' \operatorname{tang}(\alpha' - \beta'), \end{array}\right.$$

ou

$$(2)\qquad \frac{c(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta)}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta} = \frac{c'(\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\beta')}{1 + \operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\beta'}.$$

Posons

$$\operatorname{tang}\alpha = m,\quad \operatorname{tang}\alpha' = n,\quad \operatorname{tang}\beta = x,\quad \operatorname{tang}\beta' = y;$$

l'équation (1) donne

$$y = \frac{b}{b'}x,$$

et l'équation (2) devient

(3) $\quad c(m-x)(b'+bnx)=c'(b'n-bx)(1+mx)$;

d'où

$$(bx)^2-\frac{mn(b'c'-bc)+b'c-bc'}{mc'-nc}(bx)+bb'\frac{(mc-nc')}{mc'-nc}=0.$$

Ainsi le problème admet, en général, deux solutions. Avant de les construire, examinons le cas où les deux angles donnés seraient droits. On aurait

$$m=n=\infty.$$

2. L'équation (3), divisée par mn, peut s'écrire

$$c\left(1-\frac{x}{m}\right)\left(\frac{b'}{n}+bx\right)=c'\left(b'-\frac{bx}{n}\right)\left(\frac{1}{m}+x\right),$$

et, dans ce cas, elle se réduit à

$$bcx=b'c'x.$$

Si l'on n'a pas $bc=b'c'$ on doit faire $x=0$; alors le problème n'admet pas de solution. Si l'on a $bc=b'c'$, la valeur de x est indéterminée; mais, de cette égalité, on déduit

$$\frac{b+b'}{b}=\frac{c'+c}{c'}.$$

Or

$$b+b'=c'+c=\mathrm{AD},$$

donc

$$b=c' \quad \text{et} \quad b'=c;$$

les deux projections données sont à égales distances du milieu de la diagonale.

Ainsi le problème est impossible, si les projections données ne sont pas à égales distances du milieu de la diagonale. Et si cette condition est vérifiée, le problème admet une infinité de solutions. Ces conclusions découlent aussi des deux théorèmes suivants :

1°. *Les projections des extrémités d'un diamètre sur une corde quelconque sont à égales distances du milieu de cette corde ;*

2°. *Si deux droites* AD, BC *sont les diagonales d'un quadrilatère inscriptible, et que les projections des extrémités de* BC *sur* AD *soient à égales distances du milieu de* AD, BC *est un diamètre du cercle circonscrit.*

3. *Résolution du quadrilatère.* Supposons que, par un changement convenable de signes, on ait amené les coefficients de l'équation (3), résolue par rapport à bx, à être positifs (abstraction faite du signe) et à ne renfermer que des lettres qui expriment des valeurs positives. Cette équation s'écrira sous l'une des formes comprises dans l'équation

$$(4) \qquad z^2 \pm pz \pm q = 0,$$

posant

$$z = bx, \quad p = \frac{mn(b'c' - bc) + b'c - bc'}{mc' - nc}, \quad q = bb'\frac{mc - nc'}{mc' - nc}.$$

On obtiendra facilement les logarithmes de p et de q, par les Tables de Gauss, puisqu'elles permettent de calculer immédiatement le logarithme de la somme ou de la différence de deux nombres dont on connaît les logarithmes. On pourra calculer par logarithmes les racines des équations (4), données par les formules suivantes

Pour l'équation

$$z^2 - pz + q = 0,$$

on a

$$z' = p\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi, \quad z'' = p\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi,$$

en posant

$$\sin^2\varphi = \frac{4q}{p^2}.$$

Pour l'équation

$$z^2 - pz - q = 0,$$

on a

$$z' = p\,\frac{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi} \quad \text{et} \quad (-z'') = p\,\frac{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi},$$

l'angle φ étant déterminé par la relation

$$\operatorname{tang}^2\varphi = \frac{4q}{p^2}.$$

Les deux équations qu'on obtient en changeant le signe de p dans celles qui précèdent, ont leurs racines égales à celles des équations dont elles dérivent, et de signes contraires.

Connaissant $\log z = \log (b \operatorname{tang} \beta)$, on déterminera l'angle β; l'équation (1) permettra de calculer l'angle β'; une simple soustraction donnera les angles $\alpha - \beta$ et $\alpha' - \beta'$. Ainsi, dans les deux triangles ABD, ACD, on connaîtra un côté et les deux angles adjacents. On pourra ainsi calculer, par les Tables, toutes les parties du quadrilatère demandé.

4. La *construction graphique* est facile, nous ne ferons qu'indiquer celle des coefficients p et q. On peut écrire

$$p = \frac{mc.n\left(\frac{b'c'}{c} - b\right) + c\left(b' - \frac{bc'}{c}\right)}{mc' - nc}.$$

Les produits mc, nc, etc., sont les tangentes d'arcs égaux en degrés à α et α', et décrits avec des rayons égaux aux multiplicateurs c, c', etc. On les construira aisément. Soient donc

$$h = mc,\quad h' = mc',\quad l = nc,\quad l' = nc',\quad \text{et}\quad k = n\left(\frac{b'c'}{c} - b\right):$$

on aura

$$p = \frac{hk - c\left(\frac{bc'}{c} - b'\right)}{h' - l} = \frac{c\left(\frac{hk}{c} - \frac{bc'}{c} + b'\right)}{h' - l},$$

et

$$q = bb' \frac{(h - l')}{h' - l}.$$

On obtient p par des quatrièmes proportionnelles, et q en construisant un carré qui soit au carré équivalent à bb' dans le rapport des deux longueurs $(h - l')$ et $(h' - l)$.

Note. M. Piobert, étant en 1817 élève à l'École d'application de l'artillerie et du génie à Metz, a employé les propriétés du quadrilatère inscriptible ABDC pour faire des levers à l'équerre d'arpenteur et au moyen d'une seule base. Considérant la diagonale AD, comme base, et marchant sur cette droite, on détermine avec l'instrument trois des quatre points A, C', B', D, et en outre le point O, intersection des deux diagonales AD et CC; on mesure les distances AC', AO, AB', et l'on trouve facilement

$$CC' = \sqrt{\frac{AC'.AB'.OC'}{OB'}} = \sqrt{\frac{DB'.DC'.OC'}{OB'}},$$

$$BB' = \sqrt{\frac{AC'.AB'.OB'}{OC'}} = \sqrt{\frac{DB'.DC'.OB'}{OC'}}.$$