NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

O. SCHLÖMILCH

Note sur le théorème de Taylor

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 177-182
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__177_1>

NOTE SUR LE THÉORÈME DE TAYLOR;

PAR M. LE Dr O. SCHLÖMILCH,
Professeur d'analyse à l'École Polytechnique de Dresde.

Quand on fait usage du théorème de Taylor pour le développement des fonctions en séries, on trouve souvent que l'on a besoin de recherches étendues pour déterminer les limites entre lesquelles subsiste le développement. On sait qu'il y a deux méthodes pour cette discussion : l'une consiste à calculer le reste de la série et à chercher les conditions sous lesquelles il converge vers la limite zéro; mais comme ce reste est de la forme

$$\frac{x^n f^{(n)}(\theta x)}{1.2.3\ldots n},$$

on est forcé de développer d'abord la dérivée $f^n(x)$, ce qui exige un calcul très-incommode, dès que la fonction $f(x)$ n'est pas très-simple. L'autre méthode a été donnée par M. Cauchy; elle n'exige pas cette discussion du reste, elle est au contraire extrêmement simple : mais on avouera que la démonstration du théorème admirable de ce géomètre (MOIGNO, page 150) n'est pas à la portée de ceux qui font leurs premiers pas dans la science. Peut-être trouvera-t-on que le procédé que nous allons expliquer est assez simple, sans cesser d'être rigoureux.

On se convaincra sans peine, et sans le secours du calcul intégral, que toute fonction $F(x)$, dont la dérivée $F'(x)$ est constamment nulle, est nécessairement une constante; mais il n'est pas nécessaire que cette constante conserve toujours la même valeur : au contraire, si la fonction $F(x)$ offre une solution de continuité, la valeur constante de $F(x)$ ne reste pas la même, avant et après cette solution. Supposons, par exemple, que la fonction devienne discontinue pour $x=\xi$; alors l'équation $F'(x)=0$ donne deux valeurs constantes de $F(x)$, l'une $F(0)$ pour $x<\xi$, l'autre $F(\infty)$ pour $x>\xi$ (*) On peut donc dire que l'équation $F'(x)=0$ entraîne la suivante $F(x)=F(a)$, pourvu que x et a soient situés dans le même intervalle de continuité, mais que cette équation cesse de subsister si x et a sont situés dans de divers intervalles Voilà tout ce dont nous avons besoin.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de trouver la somme de la série infinie

$$(1)\qquad f(x)+\frac{a-x}{1}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{1.2}f''(x)+\dots$$

En vertu de la définition exacte de la somme d'une série infinie, ce n'est que la limite vers laquelle converge la

(*) La droite parallele a l'axe des x change subitement de position pour $x=\xi$, mais conserve sa direction TM.

somme finie

$$f(x)+\frac{a-x}{1}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$
$$+\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x),$$

que nous désignons par $F(x, n)$. En prenant la dérivée, on trouve facilement

$$(2)\qquad F'(x, n)=\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(x).$$

Maintenant, si nous faisons croître indéfiniment le nombre n, l'expression $F'(x, n)$ deviendra la dérivée de la série infinie ci-dessus; c'est-à-dire l'équation

$$F(x)=f(x)+\frac{a-x}{1}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$

donne

$$F'(x)=\lim\left[\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x)\right].$$

Si la limite indiquée est zéro, la fonction inconnue $F(x)$ se réduit à une constante; pour la déterminer, on n'a besoin que de prendre $x=a$ dans l'équation ci-dessus, et l'on aura $F(x)=F(a)=f(a)$, et, par conséquent,

$$(3)\quad f(a)=f(x)+\frac{a-x}{1}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{1.2}f''(x)+\ldots.$$

En vertu des remarques que nous avons faites, l'existence de cette équation se trouve assujettie à deux conditions : la première condition s'exprime par l'équation

$$(4)\qquad \lim\left[\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(x)\right]=0;$$

la seconde est que la fonction $F(x)$ demeure continue, si l'on va de $x = x$ jusqu'à $x = a$. Cette condition se peut énoncer d'une manière différente, quand on observe que la fonction $\mathrm{F}(x)$ sera toujours continue si la dérivée $\mathrm{F}'(x)$ jouit de la même propriété; cette dernière fonction est la limite de l'expression $\mathrm{F}'(x, n)$; donc, si $\mathrm{F}'(x, n)$ est continue, quel que soit le nombre n, il est clair que $\mathrm{F}'(x)$ et, par conséquent, $\mathrm{F}(x)$ seront de même continues. En ayant égard à la valeur (2) de $\mathrm{F}'(x, n)$, on verra sur-le-champ que la continuité de $\mathrm{F}'(x, n)$ n'exige que la continuité de $f^{(n)}(x)$, et l'on parvient ainsi au théorème suivant :

Quand il existe un intervalle dans lequel toutes les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, etc., sont continues, alors

$$f(a) = f(x) + \frac{a-x}{1} f'(x) + \frac{(a-x)^2}{1.2} f''(x) + \ldots,$$

pourvu que les valeurs x et a soient comprises dans cet intervalle et qu'elles satisfassent à la condition

$$\lim \left[\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x) \right] = 0.$$

En prenant $a = x + h$, on aura le théorème de Taylor; pour obtenir le théorème de Maclaurin, nous faisons $x = 0$, et nous remplaçons a par x; alors on peut s'exprimer de la manière suivante :

Si les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, etc., sont continues dans un intervalle qu'embrasse la valeur $x = 0$, alors il sera possible de développer la fonction $f(x)$ en série de la forme

$$(5) \quad f(x) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2 + \ldots \left[\mathrm{A}_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n} \right];$$

ce développement subsiste pour toutes les valeurs de x qui sont comprises dans l'intervalle indiqué, et qui, en *même temps, vérifient la condition*

$$\lim\,[n\,A_n\,x^{n-1}] = 0. \tag{6}$$

Ce théorème justifie la méthode des coefficients indéterminés, si facile à employer; il contient deux conditions différentes : l'une sert à déterminer les *fonctions* qui sont développables en séries de puissances, l'autre fait connaître les *valeurs* pour lesquelles subsiste le développement.

Pour faire voir la facilité qu'offre l'application de notre théorème, nous prenons pour exemple

$$f(x) = \cos(\mu \text{ arc sin } x);$$

on en déduit d'abord

$$(7)\quad \begin{cases} f'(x) = -\dfrac{\mu \sin(\mu \text{ arc sin } x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\ f''(x) = -\dfrac{\mu x \sin(\mu \text{ arc sin } x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{\mu^2 \cos(\mu \text{ arc sin } x)}{1-x^2}, \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$(1-x^2)f''(x) = xf'(x) - \mu^2 f(x).$$

En différentiant k fois cette équation, on trouvera facilement

$$(8)\quad f^{(k+2)}(x) = \frac{(2k+1)\,x f^{(k+1)}(x) + (k^2-\mu^2) f^{(k)}(x)}{1-x^2}.$$

Cette équation fait reconnaître que la fonction $f^{(k+2)}(x)$ est continue entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, si les fonctions $f^{(k+1)}(x)$ et $f^{(k)}(x)$ jouissent de la même propriété; mais, comme il est clair que les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ n'offrent aucune solution de continuité entre ces limites, on en conclut que toutes les fonctions $f(x), f'(x)$, etc., sont continues pour $1 > x > -1$; le développement est donc possible.

Maintenant on trouve, à l'aide des formules (7) et (8) :

$$f(0)=1, \quad f'(0)=0, \quad f''(0)=-\mu^2,$$
$$f'''(0)=0, \quad f^{\text{IV}}(0)=-\mu^2(2^2-\mu^2), \text{ etc.},$$

ce qui donne le développement

$$(9) \quad \cos(\mu \operatorname{arc} \sin x) = 1 - \frac{\mu^2}{1.2}x^2 - \frac{\mu^2(2^2-\mu^2)}{1.2.3.4}x^4 - \ldots\ldots$$

D'ailleurs, il est facile de prouver que l'expression

$$n A_n x^{n-1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mu^2(2^2-\mu^2)(4^2-\mu^2)\ldots[(2k)^2-\mu^2]}{1.2.3\ldots(2k-1)}x^{2k-1},$$

converge vers la limite zéro, en supposant

$$1 > x > -1;$$

les conditions nécessaires sont donc satisfaites par la détermination $1 > x > -1$. En prenant enfin

$$\operatorname{arc} \sin x = z,$$

on aura

$$\cos \mu z = 1 - \frac{\mu^2}{1.2}\sin^2 z + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 z - \ldots,$$
$$\frac{\pi}{2} > z > -\frac{\pi}{2}.$$

Cette formule est assez connue, mais sa démonstration ordinaire est moins simple et ne s'appuie pas sur le théorème de Maclaurin.