NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. FRANCK

Solution de la question 47 (voir t. IV, p. 319)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 287-290

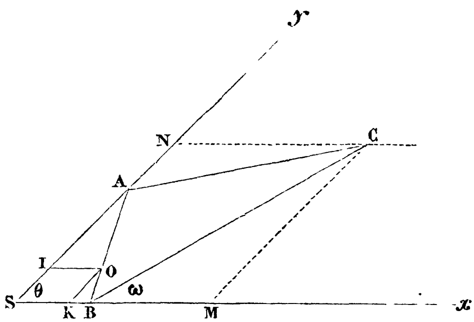
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__287_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 47

(voir t. IV, p. 319),

PAR M. A. FRANCK, ÉLÈVE,
Institution Coutant.

Par un point O donné dans un angle ASB, on mène une sécante AB terminée aux côtés de l'angle. Sur AB on construit un triangle ABC semblable à un triangle donné. On demande le lieu du sommet C.



Solution. Prenons pour axes des x et des y les côtés SB et SA de l'angle; soient

x et y l'abscisse et l'ordonnée de C,
p et q l'abscisse et l'ordonnée de O,
N et M les pieds de l'ordonnée et de l'abscisse de C,
K et I les points correspondants des coordonnées de O.

Désignons de plus par $m \sin A$, $m \sin B$, $m \sin C$ les côtés du triangle ABC respectivement opposés aux angles A, B et C; par θ l'angle des axes, et par ω l'angle CBM du côté CB avec l'axe des z.

En considérant successivement les quatre triangles

CMB, CNA, OKB et OIA, nous aurons les relations

$$y = \frac{m \sin A \sin \omega}{\sin \theta}, \quad x = \frac{m \sin B (\theta + C - \omega)}{\sin \theta},$$

$$OB = \frac{q \sin \theta}{\sin (B + \omega)}, \quad OA = \frac{p \sin \theta}{\sin (B + \omega - \theta)}.$$

Ajoutant les valeurs de OB et de OA, il viendra

$$OB + OA = m \sin C = \frac{\sin \theta [q \sin (B - \theta + \omega) + p \sin (B + \omega)]}{\sin (B + \omega) \sin (B + \omega - \theta)}.$$

Si nous divisons entre elles, membre à membre, les équations donnant les valeurs de x et de y en fonction de ω, nous aurons

$$(1) \qquad y \sin B \sin (\theta + C - \omega) = x \sin A \sin \omega.$$

Multiplions membre à membre les équations qui donnent y et $m \sin C$; remplaçant x par sa valeur, nous aurons une seconde équation ne contenant plus que des lignes trigonométriques de l'angle ω, et qui est

$$\begin{aligned}(2) \qquad & = y \sin C \sin (B + \omega) \sin (B - \theta + \omega) \\ & = \sin A \sin \omega [q \sin (B - \theta + \omega) + p \sin (B + \omega)].\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de tirer des équations (1) et (2) une relation entre x et y, indépendante de l'angle ω. Pour cela développons ces équations, en posant pour plus de simplicité $\theta + C = \varphi$ et $B - \theta = \psi$; nous aurons ainsi les deux équations

$$y \sin B (\sin \varphi \cos \omega - \cos \varphi \sin \omega) = x \sin A \sin \omega,$$

$$\begin{aligned} & y \sin C (\sin B \cos \omega + \cos B \sin \omega) (\sin \psi \cos \omega + \cos \psi \sin \omega) \\ & = \sin A \sin \omega [q (\sin \psi \cos \omega + \sin \omega \cos \psi) \\ & \qquad + p (\sin B \cos \omega + \cos B \sin \omega)].\end{aligned}$$

Divisons les deux membres de la première par $\sin \omega$, et les deux membres de la seconde par $\sin^2 \omega$; les deux dernières équations se transformeront ainsi dans les deux suivantes, ne contenant plus que cotang ω :

$$y \sin B (\sin \varphi \operatorname{cotang} \omega - \cos \varphi) = x \sin A,$$

$$y \sin C (\sin B \operatorname{cotang} \omega + \cos B)(\sin \psi \operatorname{cotang} \omega + \cos \psi)$$
$$= \sin A [q (\sin \psi \operatorname{cotang} \omega + \cos \psi) + p (\sin B \operatorname{cotang} \omega + \cos B)];$$

ou, ordonnant par rapport à cotang ω,

$$y \sin B \sin \varphi \operatorname{cotang} \omega = x \sin A + y \sin B \cos \varphi$$

et

$$\begin{aligned} & y \sin C \sin B \sin \psi \operatorname{cotang}^2 \omega \\ & + [y \sin C \sin(\psi + B) - \sin A (q \sin \psi + p \sin B)] \operatorname{cotang} \omega \\ & + y \sin C \cos B \cos \psi - q \sin A \cos \psi - p \sin A \cos B = 0. \end{aligned}$$

Éliminant cotang ω, nous aurons, en ordonnant par rapport à y et x, une équation qui représente une courbe du second degré passant par l'origine, et qui a évidemment des branches infinies. Les coefficients de y et de x contiennent seuls p et q, et ces deux quantités se trouvent l'une ou l'autre à tous les termes. Si donc on change p en mp et q en mq, c'est-à-dire si l'on transporte le point O en un autre point de la ligne SO, l'équation de la nouvelle courbe ne différera de la première que par un facteur constant multipliant les coefficients de x et de y. Ce facteur sera évidemment le rapport de similitude des deux courbes par rapport à l'origine.

Note. Les côtes AC, BC du triangle ABC sont chacun l'enveloppe d'une parabole; SA est une tangente a la parabole enveloppe de AC, et SB la tangente à la parabole enveloppe de BC; le point O est le foyer commun; de sorte que le lieu geometrique fournit une belle propriete de deux paraboles unifocales. Le foyer commun etant un centre d'homologie, point qui reste tel en projection, on deduit une propriete genérale relativement à un centre d'homologie de deux coniques quelconques. Nous devons a l'obligeance de M. Chasles cette interessante observation. L'equation du lieu peut se mettre sous cette forme symetrique,

$$\begin{aligned} & y^2 \sin B \sin C \sin(A - \theta) + xy \sin C [\sin A \sin B + \sin(A - \theta) \sin(B - \theta)] \\ & + x^2 \sin A \sin C \sin(B - \theta) - y \sin B \sin(C + \theta) [p \sin(A - \theta) + q \sin A] \\ & \qquad - x \sin A \sin(C + \theta) [p \sin B + q \sin(B - \theta)] = 0. \end{aligned}$$

On obtient cette forme, en developpant $\sin(B + \psi)$, et remplaçant φ et ψ

par leurs valeurs ; d'où l'on tire

$$m = \sin^2 C \sin^2 \theta \sin^2 (C + \theta),$$
$$k' = \sin B \sin C \sin^2 (C + \theta) \sin \theta [q \sin A - p \sin (A - \theta)],$$
$$k = \sin A \sin C \sin^2 (C + \theta) \sin \theta [p \sin B - q \sin (B - \theta)].$$

Donc : 1° le lieu est une hyperbole; 2° les coordonnees du centre sont $\frac{k}{m}$, $\frac{k'}{m}$; 3° les asymptotes font avec l'axe des x des angles egaux à $\theta - B$ et à A, ainsi l'angle des asymptotes est $\theta + C$ ou $\theta + C - 2q$; 4° une construction géometrique donne les intersections des axes coordonnés avec la courbe; et comme cette courbe passe par l'origine, on a donc trois points de la courbe et les directions des asymptotes, données suffisantes pour trouver géometriquement les axes principaux (*).