NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorèmes sur les aires des polygones et les volumes des polyèdres ; d'après M. Staudt

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 299-304

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__299_1>

THEORÈMES SUR LES AIRES DES POLYGONES ET LES VOLUMES DES POLYÈDRES;

D'APRÈS M. STAUDT,
Professeur a Erlangen.

(Journal de M. Crelle, t. XXIV, p. 252; 1843.)

POLYGONE.

1. *Lemme.* Soit ABCD un quadrilatère plan; on a

$$2\,AB.CD\cos(AB,\ CD) = (AB)^2 + (BC)^2 - (AC)^2 - (BD)^2.$$

2. Théorème. MAB, NO_1O_2 *étant deux triangles dans un même plan. Posant*

$$MA.NO_r\cos(MA,\ NO_r) = a_r;\quad MB.NO_r\cos(MB,\ NO_r) = b_r;$$

on aura

$$4\,MAB,\ NO_1O_2 = a_1b_2 - a_2b_1.$$

3. Théorème. MAB, NO_1O_2 *étant deux triangles situés dans des plans formant un angle* φ, *on aura*

$$4\,MAB,\ NO_1O_2\cos\varphi = a_1b_2 - a_2b_1;$$

a et b ayant même signification que ci-dessus.

4. Théorème. *Mêmes données. On a*

$$\begin{aligned}16\,MAB,\ NO_1O_2\cos\varphi = {} & [(MO_1)^2 + (AN)^2 - (AO_1)^2 - (MN)^2]\\ & [(MO_2)^2 + (BN)^2 - (BO_2)^2 - (MN)^2]\\ - {} & [(MO_2)^2 + (AN)^2 - (AO_2)^2 - (MN)^2]\\ & [(MO_1)^2 + (BN)^2 - (BO_1)^2 - (MN)^2].\end{aligned}$$

Démonstration. Le membre à gauche, d'après le théorème 3, est égal à $2a_1 . 2b_2 - 2a_2 . 2b_1$, et, d'après le lemme, cette dernière expression est égale au second membre de l'équation. Donc, etc.

En effectuant la multiplication, on obtient neuf termes positifs et neuf termes négatifs, formés des carrés des neuf distances des trois sommets d'un triangle aux trois sommets de l'autre. Ces termes se forment ainsi : 1° chaque terme est le produit des carrés de deux de ces distances; 2° le même sommet n'entre pas dans les deux facteurs; 3° le signe du produit se détermine ainsi. Pour fixer les idées, prenons les côtés MA et NO_1, et supposons qu'on parcoure le premier triangle dans le sens MABM, et le second triangle dans le sens NO_1O_2N; le terme $(MN)^2 (AO_1)^2$ est positif, et le terme $(MO_1)^2 (AN)^2$ est négatif; dans le premier terme, on marche dans le même sens dans les deux triangles, savoir, de M vers A et de N vers O_1; pour le second terme, on marche en sens inverse de O_1 en N, et ainsi des autres.

5. Soient le triangle MAB et un polygone plan $O_1 O_2 O_3 \ldots O_n$, φ l'angle des deux plans, P l'aire du triangle, et Q l'aire du polygone. Décomposons le polygone en triangles, ayant pour sommet commun un point N pris dans l'intérieur du polygone; considérons les deux triangles consécutifs NO_1O_2, NO_2O_3; d'après le précédent théorème, le produit $16\,P . NO_1O_2 \cos\varphi$ est égal à une somme de dix-huit termes, dont neuf sont positifs et dont neuf sont négatifs; et, de même, pour le produit $16\,P . NO_2O_3 \cos\varphi$. Mais le terme $(MN)^2 . (AO_2)^2$ est positif pour le triangle NO_2O_3, et négatif pour le triangle NO_1O_2, car on marche dans le sens inverse; donc ces deux termes se détruisent. Il en est de même pour tous les termes où entre la lettre N. Il ne faut donc conserver que les termes provenant de la

comparaison des trois côtés du triangle avec les côtés successifs O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4,..., etc.; chaque comparaison donne deux termes. On a donc en tout $6n$ termes.

6. Théorème. *Soient un polygone plan de m sommets, a_1, a_2, a_3, ..., a_m, et un autre polygone plan de n sommets, b_1, b_2, ..., b_n; φ l'angle de deux plans, et* P *et* Q *les aires respectives.* $16\,PQ\cos\varphi$ *est égal à* $2mn$ *termes, mn avec le signe* $+$, *et mn avec le signe* $-$; *le côté a_pa_{p+1} comparé au côté b_qb_{q+1} donne ces deux termes* $(a_pb_q)^2.(a_{p+1}b_{q+1})^2 - (a_pb_{q+1})^2(a_{p+1}b_q)^2$.

Démonstration. Même raisonnement que dans le § 5.

7. Soit P l'aire d'un polygone plan de n sommets; appliquant le théorème précédent à deux polygones qui se confondent, on voit que $16\,P^2$ renferme :

1°. n termes de la forme $-(a_ra_{r+1})^4$;

2°. n termes de la forme $2(a_ra_{r+1})^2(a_{r+1}a_{r+2})^2$, renfermant deux côtés consécutifs;

3°. $n(n-3)$ termes renfermant les côtés non consécutifs a_ra_{r+1}, a_pa_{p+1}).

Les termes positifs sont de la forme $2(a_ra_p)^2(a_{r+1}a_{p+1})^2$, et les termes négatifs de la forme $-2(a_ra_{p+1})^2(a_{r+1}a_p)^2$.

Exemple. $n=3$; on a

$$16\,P^2 = -m_1^4 - m_2^4 - m_3^4 + 2m_1m_2 + 2m_1m_3 + 2m_2m_3,$$

où m_1, m_2, m_3 sont les côtés du triangle. Si $n=4$, on a

$$16\,P^2 = -m_1^4 - m_2^4 - m_3^4 - m_4^4 + 2m_1^2m_2^2 + 2m_2^2m_3^2 + 2m_3^2m_4^2 + 2m_4^2m_1^2 - 2m_1^2m_3^2 - 2m_2^2m_4^2 + 2d^2e^2;$$

m sont les côtés, d et e les deux diagonales. On a aussi

$$16\,P^2 = (2de + m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2)(2de + m_2 + m_4^2 - m_1^2 - m_3^2).$$

(Voir *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 69.)

Tétraèdres.

8. *Lemme.* MABC, $NO_1O_2O_3$ sont deux tétraèdres

quelconques; posons

$$\begin{aligned} MA.NO_1 \cos(MA, NO_1) &= a_1; \\ MB.NO_1 \cos(MB, NO_1) &= b_1; \\ MC.NO_1 \cos(MC, NO_1) &= c_1; \end{aligned}$$

on a

$$(1)\left\{\begin{aligned} 36\ MABC.NO_1O_2O_3 = (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 &+ (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 \\ &+ (a_3b_1 - a_1b_3)c. \end{aligned}\right.$$

Démonstration. Considérons MC comme représentant une force en grandeur et en direction; décomposons cette force en trois autres : MV_3, perpendiculaire au plan NO_1O_2; MV_1, perpendiculaire au plan NO_2O_3; et MV_2, perpendiculaire au plan NO_1O_3; nous aurons

$$MABC = MABV_1 + MABV_2 + MABV_3.$$

(On obtient cette équation en décomposant la résultante MC et chacune de ses trois composantes, en deux autres forces, l'une située dans le plan MAB, et l'autre perpendiculaire à ce plan). Soit φ l'angle des deux faces MAB et NO_1O_2, on a (2)

$$MAB\ NO_1O_2 \cos\varphi = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)}{4}.$$

Nommons h_1, h_2 les perpendiculaires abaissées respectivement de V_3 sur MAB, et de O_3 sur NO_1O_2; nous avons

$$h_1h_2 = c_3 \cos\varphi.$$

En effet, construisons le parallélipipède des forces MV_1, MV_2, MV_3; on a h_1 égal à MV_3 multiplié par le sinus de l'inclinaison de MV_3 sur MAB; mais MV_3 est perpendiculaire sur NO_1O_2; donc $h_1 = MV_3 \cos\varphi$; $h_2 = NO_3 \times \sin$ de l'inclinaison de NO_3 sur NO_1O_2; désignons cette inclinaison par ψ; donc $h_1h_2 = MV_3.NO_3 \sin\psi \cos\varphi$; or ψ est égal à l'angle d'inclinaison de MV_3 sur la face du parallélipipède fondée par MV_1 et MV_2; donc $MV_3 \sin\psi$ est la perpendiculaire abaissée de C sur cette face: mais cette perpendiculaire est parallèle à NO_3 ; donc

$$MV_3 \sin\psi = MC \cos(MC, NO_3);$$

donc

$$h_1 h_2 = c_3 \cos\varphi;$$

d'où

$$36\, NO_1 O_2 O_3 . MABV_3 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3;$$

on démontre de même

$$36\, NO_1 O_2 O_3 . MABV_2 = (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2,$$
$$36\, NO_1 O_2 O_3 . MABV_1 = (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1.$$

Ajoutant ces trois équations, on parvient à l'équation (1).

9. Dans un triangle sphérique, le produit du sinus d'une hauteur par le sinus de la base correspondante est constant; appelons ce produit le *sinus* de l'angle solide formé par les trois rayons qui aboutissent aux trois sommets du triangle; on a donc, d'après cette définition, le volume de $MABC = \frac{1}{6} MA . MB . MC \sin \overline{M}ABC$, ou $\sin \overline{M}ABC$ est le sinus de l'angle solide en M.

Faisant

$$\cos(MA, NO_r) = \alpha_r;\ \cos(MB, NO_r) = \beta_r;\ \cos(MC, NO_r) = \gamma_r,$$

l'équation (1) donne

$$\sin \overline{M}ABC \sin \overline{N}O_1 O_2 O_3 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)\gamma_3 + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2)\gamma_1 + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3)\gamma_2$$

On en déduit aussi ce théorème : *La distance du centre de gravité d'un tétraèdre à un des sommets divisé par le sinus de l'angle solide formé par les trois autres distances, donne un quotient constant.*

On sait que les quatre distances dont il s'agit, étant considérées comme quatre forces données en grandeur et en direction, le système est en équilibre, les forces agissant du centre de gravité vers les sommets. On a donc ici un beau théorème de statique.

10. En multipliant les deux membres de l'équation (1) par 8, et remplaçant $2a_1$, $2b_1$, $2c_1$, etc., par leurs valeurs (*lemme*), on trouve, pour les termes se rapportant aux faces ABC et $O_1O_2O_3$, les six termes suivants :

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{l} (AO_1)^2(BO_3)^2(CO_2)^2+(AO_2)^2(BO_1)^2(CO_3)^2 \\ +(AO_3)^2(BO_2)^2(CO_1)^2-(AO_1)^2(BO_2)^2(CO_3)^2 \\ +(AO_2)^2(BO_3)^2(CO_1)^2-(AO_3)^2(BO_1)^2(CO_2)^2. \end{array}\right.$$

La comparaison de toutes les faces, deux à deux, donne cinquante-quatre termes analogues, dont vingt-sept positifs et autant de négatifs.

11. Si l'on représente par a, b, c les arêtes qui partent d'un sommet d'un tétraèdre, par a', b', c' les côtés opposés, et par P le volume du tétraèdre, on a, les deux tétraèdres du lemme 8 se réunissant.

$$\begin{aligned} 144\,P^2 = {} & a^2a'^2(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2) \\ & +b^2b'^2(a^2+a'^2+c^2+c'^2-b^2-b'^2) \\ & +c^2c'^2(a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2) \\ & -a'^2b'^2c'^2-a^2b^2c'^2-a^2b'^2c^2-a'^2b^2c^2. \end{aligned}$$

12. Soient P le volume d'un polyèdre formé par m triangles, Q le volume d'un polyèdre formé par n triangles, le produit 288 PQ sera égal à la somme de mn expressions de six termes chacune et de la forme indiquée 10 (A) ; $3mn$ termes positifs et $3mn$ négatifs ; c'est une conséquence du théorème 8.

13. Théorème général. *Le produit des volumes de deux polyèdres est une fonction algébrique entière des carrés des distances des sommets d'un polyèdre aux sommets de l'autre polyèdre.*

Ce théorème se démontre facilement à l'aide du théorème précédent, par un raisonnement analogue à celui qui établit le théorème 6.
