Nouvelles annales de mathématiques

BRIOSCHI

Sur des déterminants des formes quadratiques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 307-311

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__307_0>

SUR DES DÉTERMINANTS DES FORMES QUADRATIQUES;

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'Université de Pavie.

On nomme *déterminant* des n quantités :

$$\begin{array}{l} \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots,\ \omega_1, \\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ldots,\ \omega_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n,\ldots,\ \omega_n, \end{array}$$

le dénominateur commun qui résulte de la résolution des n équations de premier degré à n inconnues :

$$\begin{array}{l} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \ldots + \omega_1 x_n = A_1, \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \omega_2 x_n = A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n x_1 + \beta_n x_2 + \ldots + \omega_n x_n = A_n; \end{array}$$

et on représente cette expression par la notation symbolique :

$$\text{Dét.} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots,\ \omega_1 \\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ldots,\ \omega_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n,\ldots,\ \omega_n \end{array} \right\}.$$

Nous appellerons ce dénominateur, suivant M. Jacobi, *déterminant du $n^{\text{ième}}$ degré;* et par conséquent,

$$\text{Dét.} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1,\ \beta_1 \\ \alpha_2,\ \beta_2 \end{array} \right\} = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$$

sera un déterminant du second degré.

On sait et on démontre aisément qu'un déterminant d'un degré quelconque peut être représenté par une somme algébrique des produits de plusieurs déterminants de degrés inférieurs; mais on n'a pas aperçu, que je sache, comment la loi suivante de dérivation peut être utile dans la recherche des déterminants des expressions à formes quadratiques.

Si l'on pose

$$\text{Dét.}\begin{Bmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \alpha_2, & \beta_2 \end{Bmatrix} = d_1, \quad \text{Dét.}\begin{Bmatrix} \alpha_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \gamma_2 \end{Bmatrix} = d_2,$$

$$\text{Dét.}\begin{Bmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \alpha_3, & \beta_3 \end{Bmatrix} = d_3, \quad \text{Dét.}\begin{Bmatrix} \alpha_1, & \gamma_1 \\ \alpha_3, & \gamma_3 \end{Bmatrix} = d_4,$$

et

$$\text{Dét.}\begin{Bmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{Bmatrix} = D_1,$$

on aura

$$D_1 = d_1 d_4 - d_2 d_3.$$

De même, si l'on pose

$$\text{Dét.}\begin{Bmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \lambda_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \lambda_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \lambda_3 \end{Bmatrix} = D_2, \quad \text{Dét.}\begin{Bmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_4, & \beta_4, & \gamma_4 \end{Bmatrix} = D_3,$$

$$\text{Dét.}\begin{Bmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \lambda_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \lambda_2 \\ \alpha_4, & \beta_4, & \lambda_4 \end{Bmatrix} = D_4,$$

on aura

$$\Delta = D_1 D_4 - D_2 D_3,$$

étant

$$\Delta = \text{Dét.}\begin{Bmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \lambda_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \lambda_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, & \lambda_3 \\ \alpha^4, & \beta_4, & \gamma_4, & \lambda_4 \end{Bmatrix} (*),$$

et ainsi de suite.

(*) *Voir* Binet, *Journal de l'École Polytechnique*, cahier XVI, p. 280; année 1813.

Une expression de la forme

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2 b_1 x_1 x_2,$$

est généralement nommée forme *quadratique binaire* ou à deux indéterminées. On appellera forme quadratique à n indéterminées la suivante :

$$\begin{aligned} & a_1 x_1^2 + a_2^1 x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + \ldots \\ & + 2 b_{n-1} x_1 x_n + 2 c_1 x_2 x_3 + \ldots + 2 k_1 x_{n-1} x_n \end{aligned}$$

Représentant cette fonction par u, le déterminant de cette forme quadratique à n indéterminées sera

$$\text{Dét.} \left\{ \begin{matrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, \ldots, & u_{1n} \\ u_{12}, & u_{22}, & u_{23}, \ \ldots, & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1}, & u_{n2}, & u_{n3}, \ldots, & u_{nu} \end{matrix} \right\},$$

u_{rs} étant la dérivée seconde de la fonction u par rapport aux variables x_r, x_s (*). Cela posé, si l'on applique la loi ci-dessus à la formation des déterminants des formes quadratiques à deux, trois indéterminées, on aura

$$(1) \qquad D_1 = d_1 d_4 - d_2^2, \quad \Delta = D_1 D_4 - D_2^2 \ldots,$$

en observant que

$$d_1 = \text{Dét.} \left\{ \begin{matrix} u_{11}, & u_{12} \\ u_{21}, & u_{22} \end{matrix} \right\}, \quad d_2 = \text{Dét.} \left\{ \begin{matrix} u_{11}, & u_{13} \\ u_{21}, & u_{23} \end{matrix} \right\},$$

$$d_3 = \text{Dét.} \left\{ \begin{matrix} u_{11}, & u_{12} \\ u_{31}, & u_{32} \end{matrix} \right\}, \quad d^4 = \text{Det.} \left\{ \begin{matrix} u_{11}, & u_{13} \\ u_{31}, & u_{33} \end{matrix} \right\},$$

et par conséquent $d_2 = d_3$; et ainsi de suite.

On sait que si le déterminant $a_1 a_2 - b_1^2$ de la forme quadratique à deux indéterminées

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2 b_1 x_1 x_2,$$

(*) Voir les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome X, page 124. C'est le determinant *hessien* des Anglais. TM.

est égal à zéro, on a

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2 b_1 x_1 x_2 = \frac{1}{a_1} (a_1 x_1 + b_1 x_2)^2.$$

Considérons la forme quadratique à trois indéterminées,

$$(2) \quad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + 2 b_2 x_1 x_3 + 2 c_1 x_2 x_3,$$

on prouvera bien facilement que si le déterminant de cette expression est nul et en outre les déterminants des deux formes quadratiques suivantes :

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2 b_1 x_1 x_2,$$
$$a_1 x_1^2 + a_3 x_2^3 + 2 b_2 x_1 x_3;$$

l'expression considérée sera égale à

$$(3) \qquad \frac{1}{a_1} (a_1 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3)^2.$$

Si l'on considère, en troisième lieu, une forme quadratique à quatre indéterminées, on pourra la réduire à

$$\frac{1}{a_1} (a_1 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3 + b_3 x_4)^2;$$

en supposant : 1° nul le déterminant de cette forme; 2° nuls les déterminants des formes quadratiques suivantes à deux indéterminées :

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + 2 b_2 x_1 x_3 + 2 c_1 x_2 x_3,$$
$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_4 x_4^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + 2 b_3 x_1 x_4 + 2 c_2 x_2 x_4;$$

3° nuls les trois déterminants des formes quadratiques binaires :

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2 b_1 x_1 x_2,$$
$$a_1 x_1^2 + a_3 x_3^2 + 2 b_2 x_1 x_3,$$
$$a_1 x_1^2 + a_4 x_4^2 + 2 b_3 x_1 x_4.$$

La loi s'étend aux formes quadratiques à n indéterminées.

On doit remarquer que, les relations (1) subsistant, si l'on a $D_1 = o$ et $d_1 = d_4 = o$, l'on aura aussi $d_2 = o$; par conséquent, la forme quadratique à trois indéterminées (2) pourra se réduire à l'expression (3) si l'on a

$$d_1 = d_2 = d_4 = o.$$

De même pour les autres formes.

Ces propriétés des déterminants des formes quadratiques seront très-utiles dans la recherche des équations différentielles qui donnent les caractères du maximum et du minimum dans le calcul des variations, équations que l'on sait intégrer d'après la belle méthode de M. Jacobi.