PROUHET

Théorème sur l'équation cubique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 324-325

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__324_0>

THÉORÈME SUR L'ÉQUATION CUBIQUE;

Par M. PROUHET,
Professeur.

Théorème. *Si l'équation du troisième degré a une racine de la forme $a+\sqrt{b}$, a et b étant des nombres commensurables, les quantités contenues sous le radical dans les formules ordinaires, deviennent des cubes parfaits* (*).

Cette proposition se trouve implicitement énoncée dans l'*Algèbre* d'Euler (art. 749); elle doit avoir été démontrée quelque part, car les analystes qui se sont exprimés sur le cas irréductible ont dû, avant tout, chercher à ramener les radicaux cubiques à la forme $a+b\sqrt{-1}$; et, voyant que cela ne pouvait se faire en général, chercher dans quel cas cette réduction est possible. Voici, au reste, comment je démontre ce théorème:

Soit

$$x^3+px+q=0;$$

les racines sont données par la formule

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}.$$

Si l'on désigne par α, β, γ les trois racines, et si l'on observe que $-(4p^3+27q^2)$ est le dernier terme de l'équation au carré des différences, savoir:

$$+(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2,$$

on aura

$$x=\sqrt[3]{\frac{\alpha\beta\gamma}{2}+\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{6}\sqrt{-\frac{1}{3}}}+\ldots.$$

(*) Tome X, page 349, on lit *carrés*. C'est une faute qui n'est pas indiquée dans l'*errata*.

Si maintenant on suppose

$$\alpha = a + \sqrt{b},$$

les deux autres racines seront nécessairement

$$\beta = a - \sqrt{b}, \quad \gamma = -2a,$$

et, par suite, la formule de résolution devient

$$x = \sqrt[3]{-a(a^2 - b) + \left(3a^2 - \frac{b}{3}\right)\sqrt{-\frac{b}{3}}} + \ldots,$$

et il est facile de vérifier que

$$-a(a^2 - b) + \left(3a^2 - \frac{b}{3}\right)\sqrt{-\frac{b}{3}} = \left(-a + \sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^3.$$

Quant à la quantité placée sous le radical carré, on voit qu'elle devient un carré parfait lorsque deux racines sont de la forme $a + b\sqrt{-3}$, $a - b\sqrt{-3}$, a et b étant commensurables. Ce qui fournirait, au besoin, un moyen de résoudre en nombres commensurables l'équation

$$x^3 + y^2 = z^2.$$