HENRI BARRAL

Construction du pentagone régulier, d'après M. Staudt

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 388-390

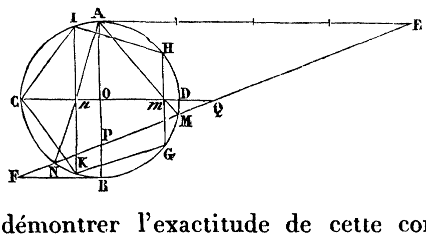
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__388_1>

CONSTRUCTION DU PENTAGONE RÉGULIER, D'APRÈS M. STAUDT;

PAR M. HENRI BARRAL,
Professeur de Mathématiques.

M. Staudt a donné, sans démonstration (CRELLE, tome XXIV; 1842), la construction suivante, pour inscrire un pentagone régulier dans un cercle :

AB *et* CD *sont deux diamètres rectangulaires ; sur la tangente en* A, *on prend une longueur* AE *quadruple du rayon ; sur la tangente en* B, *une longueur* BF *égale au rayon ; on mène la droite* EF, *et l'on joint les points* M, N, *où cette ligne coupe la circonférence, au point* A. *Ces droites rencontrent* CD *en* m *et* n; *par ces points, on mène les cordes* GH, IK *parallèles à* AB : *le pentagone* CIHGK *ainsi obtenu est régulier.*



Pour démontrer l'exactitude de cette construction, nous remarquerons que, dans tout pentagone régulier CIHGK, les distances Om, On sont respectivement égales aux côtés des deux décagones réguliers inscrits dans un cercle de rayon moitié moindre; il suffit donc de faire voir que Om et On sont les côtés des décagones inscrits dans la circonférence qui aurait pour rayon $\frac{1}{2}$ OA.

Désignons OA par R, Om par x, On par y.

Les triangles PAE, PBF donnent

$$\text{PA} : \text{PB} :: \text{AE} : \text{BF};$$

donc

$$\text{PA} = \frac{8}{5}\text{R}, \quad \text{PB} = \frac{2}{5}\text{R}, \quad \text{PO} = \frac{3}{5}\text{R}.$$

Les triangles PAE, POQ donnent

$$\text{OQ} : \text{AE} :: \text{PO} : \text{PA};$$

donc

$$\text{QO} = \frac{3}{2}\text{R}.$$

On a

(1) $$\text{M}m\,.\,m\text{A} = m\text{C}\,.\,m\text{D} = \text{R}^2 - x^2.$$

Les triangles MAE, MmQ donnent

(2) $$\frac{\text{MA}}{\text{M}m} = \frac{\text{AE}}{m\text{Q}} = \frac{4\text{R}}{\frac{3}{2}\text{R} - x} = \frac{8\text{R}}{3\text{R} - 2x};$$

en multipliant membre à membre (1) et (2), on a

$$\text{AM}\,.\,\text{A}m = (\text{R}^2 - x^2)\frac{8\text{R}}{3\text{R} - 2x}.$$

Or les triangles AOm, AMB donnent

$$\text{AM}\,.\,\text{A}m = 2\text{R}^2;$$

donc

$$2\text{R}^2 = (\text{R}^2 - x^2)\frac{8\text{R}}{3\text{R} - 2x},$$

d'où l'on tire

(3) $$x\left(x - \frac{\text{R}}{2}\right) = \left(\frac{\text{R}}{2}\right)^2.$$

En cherchant la valeur de On, on trouve

$$(4) \qquad y\left(\frac{R}{2}-y\right)=\left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

Les valeurs absolues des racines de ces deux équations sont les mêmes, et représentent les côtés des décagones inscrits dans le cercle de rayon $\frac{R}{2}$; donc le pentagone CIHGK est régulier.

Note. La construction la plus simple du pentagone régulier est celle-ci. Soient OA, OB deux rayons perpendiculaires; M le milieu OA; la différence entre BM et OM est le côté du décagone; portant cette différence de O en N sur OA, BN est le côté du pentagone (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 9 et 10); mais la construction de M. Staudt est remarquable, parce qu'il indique une construction analogue pour la division de la circonférence en *dix-sept* parties égales. On la trouve dans le même volume du Journal de M. Crelle (tome XXIV, page 251), sans figure et sans démonstration. Des fautes typographiques rendent la description inintelligible pour moi. TM.