NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorème de Pythagore, sphérique ; d'après Chr. Gudermann

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 409-412

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__409_0>

THÉORÈME DE PYTHAGORE, SPHÉRIQUE;

D'APRÈS CHR. GUDERMANN.

(Journal de M. Crelle, t. XLII, p. 280; 1851.)

1. *Définition.* Un *rectangle sphérique* est un quadrilatère sphérique dont les côtés opposés sont égaux, et dont les quatre angles sont égaux.

Un *carré sphérique* est un quadrilatère sphérique qui a les *quatre* côtés égaux et les quatre angles égaux.

Dans ce qui suit, nous supprimons l'épithète sphérique qui doit être sous-entendue.

2. *Lemme.* α, β étant les côtés adjacents d'un rectangle, C l'angle et s l'aire, on a

$$\sin\frac{s}{4} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta.$$

Démonstration. Le rectangle est inscriptible; on a donc la formule donnée page 438 du tome VIII; savoir :

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma = \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\sin\frac{s}{4},$$

où γ est la diagonale.

Observation. Dans la formule citée, il faut supprimer le coefficient 2, qui est fautif.

On doit avoir

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta < 1, \quad \text{ou} \quad \alpha + \beta < \pi.$$

Corollaire. Si le rectangle devient un carré, on a

$$\sin\frac{s}{2} = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\alpha, \quad \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

3. THÉORÈME. *Étant donné un triangle rectangle,*

α, β sont les côtés de l'angle droit, et γ l'hypoténuse ; si l'on construit sur chaque côté un carré, et que l'on représente par c l'aire du carré construit sur l'hypoténuse, et par a, b les aires des carrés construits sur les deux autres côtés, on aura

$$\mathfrak{L}\left(\frac{c}{4}\right) = \mathfrak{L}\left(\frac{a}{4}\right) + \mathfrak{L}\left(\frac{b}{4}\right).$$

Démonstration.

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta,$$

$$\log\sqrt{\frac{1}{\cos\gamma}} = \log\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}} + \log\sqrt{\frac{1}{\cos\beta}},$$

$$\sin\frac{a}{4} = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\sin\frac{a}{4}}{1+\sin\frac{a}{4}}.$$

On a des équations analogues pour $\cos\beta$ et $\cos\gamma$; donc

$$\log\sqrt{\frac{1+\sin\frac{c}{4}}{1-\sin\frac{a}{4}}} = \log\sqrt{\frac{1+\sin\frac{a}{4}}{1-\sin\frac{a}{4}}} + \log\sqrt{\frac{1+\log\frac{b}{4}}{1-\log\frac{b}{4}}},$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{L}\left(\frac{c}{2}\right) = \mathfrak{L}\left(\frac{a}{2}\right) + \mathfrak{L}\left(\frac{b}{2}\right).$$

Observation. Cette proposition est analogue à celle de Pythagore pour le triangle rectiligne.

Nous sommes obligés d'entrer dans quelques détails pour faire comprendre cette notation. Désignons par des lettres initiales capitales les lignes trigonométriques hyperboliques, coordonnées de l'hyperbole équilatère.

Soient

$$\text{Cos}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \text{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \text{d'où } \text{Cos}^2 x - \text{Sin}^2 x = 1,$$

$$\text{Tang}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\quad e^x = \text{Cos}\, x + \text{Sin}\, x,$$

$$e^{-x} = \text{Cos}\, x - \text{Sin}\, x,$$

$$x = \log(\text{Cos}\, x + \text{Sin}\, x);\quad -x = \log(\text{Cos}\, x - \text{Sin}\, x),$$

$$2x = \log\left(\frac{1 + \text{Tang}\, x}{1 - \text{Tang}\, x}\right);$$

faisons

$$\text{Tang}\, x = z,$$

ce qui est toujours possible; nous aurons

$$x = \log\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}.$$

Par analogie, on nomme x l'arc dont la Tangente hyperbolique est égale à z; ainsi

$$\text{arc Tang} = z = \log\sqrt{\frac{1+z}{1-z}};$$

c'est l'arc dont la Tangente hyperbolique est z, que Gudermann désigne par $\mathfrak{L}(z)$, quantité qui se rattache facilement à une aire hyperbolique.

Il est aisé de voir que si le rayon de la sphère devient infini, $\mathfrak{L}\left(\frac{c}{2}\right)$ devient $\frac{\gamma^2}{4}$.

Donc alors

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2;$$

théorème de Pythagore.

Note. Ce beau théorème est le travail ultime du célèbre professeur de l'Université de Munster qui a fait faire tant de progrès à la géométrie de la sphère. Il a écrit ce théorème la veille de sa mort, et a été enlevé subitement à la science qu'il cultivait avec tant d'ardeur et de succès, le 21 septembre 1851.

Versé dans toutes les branches des mathématiques, il possédait surtout une grande habileté pour le calcul; c'est ce que montrent les nombreux Mémoires dont il a enrichi le Journal de M. Crelle. A la fin du premier cahier du tome XLIII, on trouve le *fac-simile* du théorème ci-dessus en *latin* et la lettre d'envoi en allemand, en caractères gothiques; l'une et l'autre d'une écriture fine et très-lisible.

Dans plusieurs questions physico-mathématiques, on fait un emploi avantageux des sinus, cosinus, etc., hyperboliques (*Leçons sur l'élasticité*, page 152). Gudermann a publié des Tables de ces lignes. M. Yvon Villarceau les a considérablement perfectionnées, en calculant ces lignes par *centièmes*, à commencer par 0,01, et a fini par 15; le tout avec 15 décimales. Un gouvernement s'honore en encourageant la publication de tels travaux.