Nouvelles annales de mathématiques

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 441-447

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__441_0>

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annonces dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins, n° 55.

Traité de Géométrie supérieure; par M. *Chasles*, Membre de l'Institut, Professeur de Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences de Paris. Un beau volume in-8° de LXXXIV-602 pages et 12 planches. Paris, 1852; imprimerie de Bachelier.

Nous n'avons pas besoin d'apprendre à nos lecteurs combien la Géométrie doit au zèle et au talent de M. Chasles. Nos recueils scientifiques renferment une foule de beaux Mémoires, dans lesquels le célèbre professeur de la Sorbonne nous a révélé de nombreux et importants théorèmes, et, ce qui vaut mieux, des théories aussi remarquables par leur simplicité que par leur fécondité.

Mais il ne suffit pas de découvrir des propositions nouvelles. il faut encore, lorsqu'elles sont assez nombreuses pour changer l'aspect de la science, marquer leur place parmi les propositions anciennement connues, et former des unes et des autres un ensemble où tout se coordonne sans lacune, sans disparate. Tel est le but que s'est proposé M. Chasles, dans l'ouvrage dont nous allons rendre compte. L'auteur ne s'est pas borné à recueillir ses propres travaux et ceux de ses devanciers ou de ses contemporains : il y a joint de notables perfectionnements, et fait faire à la science de nouveaux progrès.

Le *Traité de Géométrie supérieure* est partagé en quatre sections et trente-cinq chapitres.

La première section est consacrée aux principes fondamentaux, c'est-à-dire, aux théories du rapport anharmonique, de la division homographique et de l'involution.

M. Chasles débute par un de ces perfectionnements dont nous parlions tout à l'heure. Il avertit que dans le cours de l'ouvrage il désignera par les signes + et —, le sens des segments rectilignes comptés sur la même direction et des angles décrits autour du même sommet. Un respect superstitieux pour la Géométrie des Anciens, joint à une sorte de préjugé sur la séparation absolue des méthodes dites synthétique et analytique, avaient empêché jusqu'ici les géomètres d'adopter cette utile convention. Les Anciens, par la nature des sujets qu'ils traitaient, ont pu s'en passer; mais les Modernes, en abordant des questions plus vastes, se sont trouvés bientôt exposés à l'un ou l'autre de ces deux inconvénients : ou ne démontrer un théorème que pour un état particulier de la figure et étendre la conclusion aux autres états par analogie; ou bien accompagner chaque démonstration de l'examen de tous les cas particuliers. La première marche est dénuée de toute rigueur : la seconde, qui d'ailleurs n'est pas toujours praticable, est longue et embarrassée, et elle use inutilement les forces de l'esprit à des détails minutieux et sans intérêt. L'adoption du principe des signes fait disparaître ces inconvénients : il suffit d'établir d'abord quelques propositions très-simples, qui impliquent par elles-mêmes ce principe qu'elles conservent et transmettent ensuite dans toutes les déductions ultérieures. On peut alors raisonner sur l'état général d'une figure, comme en analyse, ou plutôt c'est de l'analyse véritable, non plus restreinte à l'étude des lieux géométriques, mais appliquée à toutes les parties de la Géométrie où son emploi apporte des simplifications.

Un autre emprunt fait à l'analyse permet à M. Chasles de donner aux questions géométriques une généralité encore plus grande : je veux parler de la notion des points et droites imaginaires, artifice ingénieux qui diminue le nombre des énoncés et réunit dans une même classe des propositions de nature très-diverse. Mais certaines méthodes font naître des découvertes avec si peu d'effort, qu'on s'est abandonné quelquefois au plaisir d'accumuler des théorèmes nouveaux sans s'inquiéter beaucoup de la rigueur et de l'ordre logique. C'est ainsi qu'on a souvent employé les imaginaires sans les bien définir, et qu'on a fondé plusieurs démonstrations sur un prétendu principe de continuité qui n'est véritablement qu'une forte induction. Le talent profondément philosophique de M. Chasles lui a fait éviter ces écueils. Nous ne pouvons mieux faire que de citer ici ses propres paroles :

« Une étude attentive des différents procédés de démonstration qui peuvent s'appliquer à une même question, m'a convaincu qu'à côté d'une démonstration facile, fondée sur quelques propriétés accidentelles ou contingentes d'une figure, devaient s'en trouver toujours d'autres, fondées sur des propriétés absolues et subsistantes dans tous les cas que peut présenter la figure, en raison de la diversité de position de ses parties ; et j'ai éprouvé que la recherche de ces démonstrations complétement rigoureuses, est d'autant plus utile qu'elle met nécessairement sur la voie des propositions les plus importantes, de celles qui établissent tous les liens qui doivent exister entre les différentes parties d'un même sujet....

» Ces démonstrations deviennent *aussi faciles que les premières,* quand on a préparé la voie par la recherche de quelques propositions d'une certaine nature ; savoir, de propositions reposant sur les propriétés *absolues* ou *permanentes* de la figure et non simplement sur ses propriétés *contingentes*. Ces propositions se distinguent par ce caractère spécial, que les objets susceptibles de devenir imaginaires n'y entrent pas sous forme explicite, mais s'y trouvent représentés par des *éléments* réels, de même que les racines d'une équation n'entrent pas par elles-mêmes dans les calculs de la géométrie analytique, et y sont représentées collectivement par les coefficients de l'équation. »

Malgré ces bonnes raisons, il est à craindre qu'un long temps ne s'écoule avant que l'on adopte franchement les imaginaires en géométrie. Cela tient, croyons-nous, à des préjugés, à des répugnances qui s'évanouiraient si l'on étudiait avec plus d'attention les procédés naturels et spontanés de l'esprit humain. On cesserait alors de s'étonner de bien des choses; ou plutôt, on ne s'étonnerait plus que d'une seule, d'avoir, comme M. Jourdain, fait longtemps de la prose sans le savoir. Et, en effet, les locutions algébriques, en ce qui concerne les imaginaires, ne sont pas aussi éloignées du langage habituel qu'on pourrait le croire. Lorsqu'on raisonne dans *un certain ordre d'idées*, à l'aide d'expressions empruntées à un *autre ordre*, les *opérations* de l'esprit sont alors purement *symboliques*, n'ont, prises à la lettre, aucune *réalité*, et cependant elles conduisent à des conclusions exactes, quand on a bien marqué le sens et les limites de cette correspondance singulière qui existe entre les deux ordres d'idées. A ce point de vue, on peut considérer les imaginaires comme le langage figuré des mathématiques, et il est sans doute aussi déraisonnable d'en priver la géométrie qu'il le serait de vouloir supprimer, dans le discours, toute expression métaphorique.

Outre les avantages qui résultent de l'emploi judicieux des signes + et —1 et des imaginaires bien définies, les théories exposées dans ce livre présentent encore un troisième caractère de généralité. Elles s'appliquent indifféremment et avec la même facilité aux deux genres de propositions que l'on peut distinguer dans la science de l'étendue, selon qu'elles se rapportent à des points ou à des droites : propositions qui se correspondent en vertu de certaines lois, auxquelles on a donné le nom de *principe de dualité;* en sorte qu'il n'est plus nécessaire de recourir, pour passer des unes aux autres, aux méthodes de transformation des figures. Ce n'est pas que ces dernières méthodes ne soient fort utiles et ne mettent souvent sur la voie de bien des découvertes; mais elles ne satisfont pas complétement aux besoins de la science et ne peuvent suppléer à des démonstrations directes.

Nous venons de traiter assez longuement quelques points auxquels M. Chasles attache, avec raison, une grande importance. Ne pouvant consacrer la même étendue au reste de l'ouvrage, nous nous contenterons d'en donner le sommaire.

La seconde section renferme les applications des trois théories fondamentales à la démonstration des propriétés des figures rectilignes. On y trouve les propositions les plus utiles sur le triangle, le quadrilatère et les polygones; divers modes de description d'une ligne droite par points; la théorie des transversales; les centres des moyennes distances et des moyennes harmoniques. Des formules pour la résolution des équations et pour la décomposition des fractions rationnelles, y sont données comme conséquences de théories purement géométriques.

La troisième section contient la théorie prise d'un point de vue très-général, des systèmes de coordonnées servant à exprimer la position d'un point ou celle d'une droite; la théorie générale de la transformation des figures, soit en figures du même genre appelées *figures homographiques,* dans lesquelles des points correspondent à des points et des droites à des droites, soit en figures de genre différent, appelées *figures corrélatives,* dans lesquelles des points correspondent à des droites et des droites à des points.

La quatrième section traite des cercles. On y trouve la théorie des pôles et polaires, celle des axes radicaux et les propriétés de quelques polygones inscrits ou circonscrits. Des théorèmes relatifs au cône à base circulaire et aux fonctions elliptiques terminent le volume.

Tel est, dans son ensemble, le *Traité de Géométrie supérieure,* véritable monument élevé à la science de l'étendue, empreint de cette forte unité qui est le caractère distinctif des œuvres capitales. Est-il besoin d'ajouter que le style est partout clair et élégant, que les démonstrations simples et naturelles se suivent sans effort? M. Chasles n'avait garde de se défaire de ses qualités habituelles dans un ouvrage destiné à perpétuer son nom.

Nous espérons que M. Chasles voudra bien tenir le plus tôt possible la promesse qu'il fait *implicitement* en plusieurs endroits, de nous donner une exposition complète des propriétés des lignes et des surfaces courbes. Ce sera un service important rendu à la science et un nouveau titre à la reconnaissance des géomètres.

Après avoir montré la valeur scientifique de ce beau volume, nous en signalerons encore le mérite typographique. La netteté de l'impression, l'élégante disposition des formules, la correction du texte ne laissent véritablement rien à désirer. Il faut en savoir d'autant plus de gré à M. Bachelier et à son habile prote M. Bailleul, que l'impression des ouvrages de mathématiques offre des difficultés spéciales dont on ne vient à bout qu'à force de soins minutieux, de patiente attention. Nous n'insisterons pas davantage, car nos lecteurs ont sans doute souvent pu juger par eux-mêmes de ce que l'on doit attendre d'un éditeur consciencieux et jaloux de sa réputation.

(E. Prouhet.)

Note. L'*analyse et la synthèse* sont deux modes de raisonnements qu'on rencontre partout, dans la Géométrie aussi bien que dans l'Algèbre. Ce qui distingue ces deux sciences l'une de l'autre, ce sont leurs moyens d'investigation. La Géométrie est *graphique;* elle s'adresse à la fois à l'*œil extérieur* et à l'*œil intérieur* (l'intelligence). De là, une grande facilité de conception, une extrême clarté. L'Algèbre est *algorithmique;* elle ne s'étale que devant l'*œil intérieur;* de là, une haute abstraction, une généralité immense. Ces sciences, en se prêtant mutuellement leurs moyens respectifs, acquièrent les avantages attachés à ces moyens. La géométrie moderne, en empruntant le symbolisme algébrique, a gagné en *généralisation* sans rien perdre ni de sa clarté, ni de sa rigueur. Cette *symbolisation* est même le but principal vers lequel se dirigent, en divers sens, les travaux des grands géomètres contemporains, au nombre desquels l'auteur de la *Géométrie supérieure* tient une place si distinguée. Dans cet ouvrage remarquable, les mots *rapport, proportion, addition, soustraction, égalité, rectangle* ou *produit* sont remplacés par des *signes.* L'addition étant un accroissement de chemin, un mouvement en avant, et la soustraction un mouvement en arrière, les signes + et — peuvent aussi servir à indiquer des *directions opposées.* M. Chasles fait ressortir l'avantage de cette notation pour imprimer aux théorèmes un caractère de généralite et parvenir a de nouveaux théorèmes. Les égalités revêtant les formes d'équations, en les combinant, on remplace la logique traînante de l'ancienne géométrie par le *calcul* rapide des temps modernes.

Depuis longtemps on fait des efforts pour introduire $\sqrt{-1}$ dans la science de l'espace. Les résultats ne sont pas complétement satisfaisants. Mais les fonctions symétriques des racines imaginaires étant *réelles,* lorsqu'il ne s'agit que de ces fonctions, les imaginaires sont, pour ainsi dire, susceptibles d'être construites. C'est ainsi qu'une conique imaginaire a un *centre* réel. M. Chasles se tient dans cette sage réserve.

Laquelle des deux méthodes, géométrique et algébrique, est préférable? Question oiseuse, à laquelle chacun répond selon la tendance de son esprit. Il faut dans chaque cas employer la méthode qui mène promptement et le plus facilement au but, mais toujours en conservant l'inexorable rigueur logique, qui est l'âme de la science. Renoncer à cette rigueur, c'est noyer la science dans le bourbier *utilitaire,* où l'on veut entraîner l'enseignement classique.

Exemple. Lorsqu'on veut circonscrire un cercle à un triangle, on suppose le problème résolu; on considère les côtés comme des cordes; ce procédé est *analytique.* Pour prouver que le point trouvé est également éloigné des sommets, on suit un procédé *synthétique.*

Dans le 23e livre, Euclide donne des demonstrations analytiques et synthétiques de chacune des cinq premières propositions, et Pappus consacre presque un livre entier à la géométrie analytique; mais qui n'est pas *cartésienne,* qui n'est pas *algorithmique.* TM.