Nouvelles annales de mathématiques

F. Frenet

Théorèmes sur les courbes gauches

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 365-372
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__365_1>

THEORÈMES SUR LES COURBES GAUCHES (*);

PAR M. F. FRENET,
Professeur au lycée de Lyon.

Dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales* (page 192), M. O. Bonnet a énoncé diverses propositions relatives aux courbes gauches, et indiqué la méthode par laquelle il les établit. Ces résultats peuvent s'obtenir un peu plus longuement peut-être, mais d'une manière très-simple aussi, au moyen de formules tirées d'un travail que j'ai remis à M. Liouville en 1847, et qu'il a eu la bonté d'insérer dans le tome XVII du *Journal de Mathématiques*. Ces formules, qui me paraissent propres à simplifier l'étude des courbes gauches, ne supposent pas un choix particulier d'axes, et introduisent

(*) Voir t. IV, p. 612; t. VI, p. 227; t. VIII, p. 239, 381; t. XI, p. 192.

dans les calculs une symétrie et des réductions qui les abrégent souvent beaucoup. Je me propose d'en faire l'application aux théorèmes de M. O. Bonnet.

1. Soient a, b, c les *cosinus déterminants* de la tangente au point M (x, y, z) d'une courbe gauche; λ, μ, ν, α, 6, γ des quantités analogues pour la normale principale et l'axe du plan osculateur; ω l'angle de contingence; u celui de torsion. On connaît les relations qui lient $a, b, c, \lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma$, auxquelles il faut joindre les suivantes :

$$\frac{da}{\lambda} = \frac{db}{\mu} = \frac{dc}{\nu} = \omega, \tag{1}$$

$$\frac{d\alpha}{\lambda} = \frac{d6}{\mu} = \frac{d\gamma}{\nu} = -u. \tag{2}$$

Ces relations fournissent encore celles-ci :

$$(3)\left\{\begin{array}{l} \alpha da + 6db + \gamma dc = 0, \quad \alpha d^2a + 6d^2b + \gamma d^2c = \omega u, \\ ad\alpha + bd6 + cd\gamma = 0, \quad ad^2\alpha + bd^26 + cd^2\gamma = \omega u. \end{array}\right.$$

Les coordonnées du point M' voisin de M seront

$$x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z,$$

et en désignant par ε l'arc MM', on aura

$$\Delta x = a\varepsilon + \frac{da}{ds}\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{d^2a}{ds^2}\frac{\varepsilon^3}{6} + \ldots.$$

Comme l'arc MM' est infiniment petit, on pourra poser plus brièvement

$$(4)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Delta x}{\varepsilon} = a + \dfrac{1}{2}da + \dfrac{1}{6}d^2a + \ldots, \\ \text{on a de même} \\ \quad \Delta a = da + \dfrac{1}{2}d^2a + \ldots, \\ \quad \Delta\alpha = d\alpha + \dfrac{1}{2}d^2\alpha + \ldots, \end{array}\right.$$

et plusieurs autres équations semblables qu'il est inutile d'écrire.

De là et des formules (1), (2) et (3), on conclut

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha\Delta x + 6\Delta y + \gamma\Delta z = \dfrac{\varepsilon}{6}(\alpha d^2 a + 6 d^2 b + \gamma d^2 c) = \dfrac{1}{6} u\omega ds, \\ \alpha\Delta a + \ldots \qquad = \dfrac{1}{2}(\alpha d^2 a + \ldots \qquad) = \dfrac{1}{2} u\omega, \\ a\Delta\alpha + \ldots \qquad = \dfrac{1}{2}(a d^2\alpha + \ldots \qquad) = \dfrac{1}{2} u\omega. \end{cases}$$

2. *Direction et grandeur de la plus courte distance des tangentes en* M *et en* M'. En général, on peut obtenir, pour ainsi dire sans calcul, la direction et la grandeur de la plus courte distance δ de deux droites D et D_1. Soient, en effet, a, b, c, p, q, r les cosinus déterminants et les coordonnées d'un point de D; a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1, les quantités analogues pour D_1; υ l'angle de ces droites : les cosinus qui définissent la direction de δ sont, d'après des formules connues,

$$\frac{bc_1 - cb_1}{\sin\upsilon},\quad \frac{ca_1 - ac_1}{\sin\upsilon},\quad \frac{ab_1 - ba_1}{\sin\upsilon}.$$

Désignons par h la distance du point (p, q, r) au point (p_1, q_1, r_1); $\frac{p-p_1}{h}$, $\frac{q-q_1}{h}$, $\frac{r-r_1}{h}$ représentent les cosinus déterminants de la direction de h; d'ailleurs, si φ est l'angle des directions de h et de δ, on a

$$\delta = h\cos\varphi,$$

et comme

$$\cos\varphi = \frac{p-p_1}{h}\,\frac{(bc_1 - cb_1)}{\sin\upsilon} + \ldots,$$

il en résulte

$$\delta = \frac{(p-p_1)(bc_1 - cb_1) + (q-q_1)(ca_1 - ac_1) + (r-r_1)(ab_1 - ba_1)}{\sin\upsilon}.$$

Ce calcul est trop simple sans doute pour n'être pas connu, mais je le donne ici parce qu'il ne me paraît pas répandu dans l'enseignement (*).

Si les droites sont les tangentes en M et M', on a

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\omega}\left[\frac{\Delta x}{\varepsilon}(b\Delta c - c\Delta b) + \ldots\right]:$$

en tenant compte des relations (4), la grande parenthèse devient

$$\left(a + \frac{1}{2}da + \frac{1}{6}d^2 a + \ldots\right)(b\Delta c - c\Delta b) + \ldots,$$

ou

$$\frac{1}{2}\left(da + \frac{1}{3}d^2 a + \ldots\right)(b\Delta c - c\Delta b) + \ldots;$$

d'ailleurs

$$(b\Delta c - c\Delta b) = (bdc - cdb) + \frac{1}{2}(bd^2c - cd^2b),$$

en se bornant aux termes du second ordre. Mais

$$bdc - cdb = \alpha\omega,$$

à cause des formules (1); l'expression qui nous occupe devient donc

$$\frac{1}{2}\left(da + \frac{1}{3}d^2 a + \ldots\right)\left[\alpha\omega + \frac{1}{2}d(\alpha\omega)\right] + \ldots.$$

En développant la différentielle indiquée et négligeant les termes d'un ordre supérieur au troisième, il vient [formules (1), (2) et (5)]

$$\frac{1}{4}\omega(d\alpha\, da + \ldots) + \frac{1}{6}\omega(\alpha\, d^2 a + \ldots) = -\frac{1}{12}\omega^2 u.$$

La valeur absolue de δ est donc $\frac{1}{12}\omega uds$.

(*) Si les droites D et D_1 sont parallèles, que devient δ?

3. *Angle de la perpendiculaire commune aux deux tangentes avec le plan osculateur.* Les cosinus déterminants de la perpendiculaire commune sont (n° 2)

$$\frac{b\Delta c - c\Delta b}{\omega}, \quad \frac{c\Delta a - a\Delta c}{\omega}, \quad \frac{a\Delta b - b\Delta a}{\omega},$$

et le sinus de l'angle cherché ou l'angle lui-même est le cosinus de l'angle de cette direction avec celle de la normale principale; l'angle cherché est donc

$$\left.\begin{aligned}\frac{\lambda(b\Delta c - c\Delta b)}{\omega} + \ldots &= \frac{\Delta a(\mu c - \nu b)}{\omega} + \ldots \\ &= \frac{\alpha\Delta a + \ldots}{\omega} = \frac{1}{2}u\end{aligned}\right\}\text{[formule (5)].}$$

4. *Angle de la tangente en* M′ *et du plan osculateur en* M. Le sinus de cet angle ou l'angle lui-même a pour expression

$$\alpha(a + \Delta a) + \ldots = \alpha\Delta a + \ldots = \frac{1}{2}u\omega.$$

5. *Angle de la corde* MM′ *avec le plan osculateur en* M. σ étant la longueur de cette corde, la valeur de l'angle cherché est

$$\alpha\frac{\Delta x}{\sigma} + 6\frac{\Delta y}{\sigma} + \gamma\frac{\Delta z}{\sigma} = \frac{1}{6}u\omega \text{ [formule (5)].}$$

On déduit de là que la distance de M′ au plan osculateur est $\frac{1}{6}u\omega ds$, résultat qui se tire d'ailleurs immédiatement de la formule qui donne la distance d'un point à un plan.

6. *Angle du plan osculateur avec le plan* P *mené par la tangente et le point* M′. L'axe du plan P est perpendiculaire à la tangente (a, b, c) et à la corde MM′ $\left(\frac{\Delta x}{\sigma}, \frac{\Delta y}{\sigma}, \frac{\Delta z}{\sigma}\right)$: d'ailleurs, l'angle de cette corde

avec la tangente est, comme on sait, égal à $\frac{\omega}{2}$; donc les cosinus déterminants de l'axe du plan P sont

$$\frac{b\,\Delta z - c\,\Delta y}{\frac{1}{2}\,\omega\,\sigma}, \ldots;$$

et comme cet axe est dans le plan normal, l'angle cherché est

$$\frac{2}{\omega}\left[\lambda\left(b\,\frac{\Delta z}{\varepsilon} - c\,\frac{\Delta y}{\varepsilon}\right) + \ldots\right],$$

ou

$$\frac{2}{\omega}\left[\frac{\Delta x}{\varepsilon}(\mu c - \nu b) + \ldots\right] = \frac{2}{\omega}\left(\frac{\alpha\,\Delta x + \ldots}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{3}\,u.$$

7. *Angle de la tangente avec l'intersection* I *des deux plans osculateurs en* M *et en* M'. Cette intersection est perpendiculaire aux axes des plans qui la contiennent, et comme u est l'angle de ces axes, les cosinus déterminants de la direction I sont

$$\frac{\beta\,\Delta\gamma - \gamma\,\Delta\beta}{u}, \ldots$$

L'angle cherché est le cosinus de l'angle que fait I avec la normale principale, et a pour valeur

$$\frac{\lambda(\beta\,\Delta\gamma - \gamma\,\Delta\beta)}{u} + \ldots = \frac{\Delta\alpha(\mu\gamma - \nu\beta)}{u} + \ldots$$
$$= -\frac{a\,\Delta\alpha + \ldots}{u} = -\frac{1}{2}\,\omega.$$

8. *Distance du point* M *au point de rencontre de la tangente avec la droite* I. Les équations de la droite I sont

$$(X - x)\alpha + \ldots = 0, \quad (X - x - \Delta x)(\alpha + \Delta\alpha) + \ldots = 0,$$

ou bien

$$(X - x)\alpha + \ldots = 0, \quad (X - x)\Delta\alpha + \ldots = \alpha\,\Delta x + \ldots.$$

Soient X, Y, Z les coordonnées du point de rencontre de I avec la tangente, et l la distance cherchée; on a

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c} = l,$$

et, par suite,

$$l(a\Delta\alpha + b\Delta6 + c\Delta\gamma) = \alpha\Delta x + \ldots;$$

d'où

$$l = \frac{1}{3}\,ds.$$

9. *Distance du point* M *à la droite* I. Cette distance s'obtient en multipliant la quantité l que nous venons de trouver par l'angle calculé au n° 7. On trouve ainsi $\frac{1}{3}\omega\,ds$ pour la valeur absolue de la distance cherchée.

10. On voit sans peine qu'on peut se poser une foule de questions de la nature de celles qui sont résolues ici, et qui se traiteraient par des procédés tout à fait semblables. On arriverait, par exemple, entre autres résultats, à cette proposition souvent utile : *La différence entre l'arc et la corde est un infiniment petit du troisième ordre, et sa valeur est* $\frac{1}{24}\omega^2\,ds$.

11. Je termine par la démonstration des formules (2). Je les ai obtenues d'abord par la Géométrie, mais on peut y arriver en adoptant une marche purement analytique, comme il suit. On a

$$\begin{aligned} u^2 = d\alpha^2 + d6^2 + d\gamma^2 = {} & (6\,d\gamma - \gamma\,d6)^2 \\ & + (\gamma\,d\alpha - \alpha\,d\gamma)^2 + (\alpha\,d6 - 6\,d\alpha)^2. \end{aligned}$$

Or, de $\alpha = \mu c - \nu b$ on tire

$$d\alpha = d\mu . c - d\nu . b;$$

car $\mu\,dc - \nu\,db = 0$ à cause des formules (1).

On aurait de même

$$d\beta = d\nu . a - d\lambda . c, \quad d\gamma = \ldots;$$

par suite,

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha d\beta - \beta d\alpha = a\alpha d\nu - \alpha c d\lambda - \beta c d\mu + \beta b d\nu \\ \qquad = - c(\alpha d\lambda + \beta d\mu + \gamma d\nu). \end{cases}$$

Les binômes $\beta d\gamma - \gamma d\beta$, $\gamma d\alpha - \alpha d\gamma$ s'obtiendraient d'une manière analogue. On a donc

$$u^2 = (\alpha d\lambda + \beta d\mu + \gamma d\nu)^2,$$

et

$$(7) \qquad u = \pm(\alpha d\lambda + \beta d\mu + \gamma d\nu).$$

En adoptant le signe $+$, cette formule revient à celle qu'on donne ordinairement; mais alors u est susceptible de signe, et, en mettant sa valeur sous la forme

$$a(\lambda + d\lambda) + b(\mu + d\mu) + c(\nu + d\nu),$$

on reconnaît qu'elle est positive lorsque la normale principale au point M′ fait un angle aigu avec *la partie positive* de l'axe du plan osculateur; elle serait négative si cet angle était obtus.

Observons maintenant que nous pouvons écrire, en vertu des équations (6) et (7),

$$\alpha \frac{d\beta}{u} - \beta \frac{d\alpha}{u} = -c,$$

$$\gamma \frac{d\alpha}{u} - \alpha \frac{d\gamma}{u} = -b,$$

$$\beta \frac{d\gamma}{u} - \gamma \frac{d\beta}{u} = -a;$$

et, en rapprochant ces relations des suivantes,

$$\alpha\mu - \beta\nu = c, \quad \gamma\lambda - \alpha\nu = b, \quad \beta\nu - \gamma\mu = a,$$

on en déduit les égalités (2).