

E. BRASSINNE

**Nouvelle analogie de l'algèbre et
du calcul intégral**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 12
(1853), p. 82-84

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__82_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLE ANALOGIE DE L'ALGÈBRE ET DU CALCUL INTÉGRAL ;

PAR M. E. BRASSINNE.

Soit $f(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0$, une équation différentielle linéaire de l'ordre m ; changeons y en yu (u étant une fonction indéterminée de x), nous aurons le développement suivant :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} f[x, yu, (yu)', \dots, (yu)^{(m)}] = f(x, y, y', \dots, y^{(m)}) \cdot u \\ + 'f(x, y, y', \dots, y^{(m)}) \frac{du}{dx} + ''f(x, y, y', \dots) \frac{d^2 u}{1.2.dx^2} + \dots \end{array} \right.$$

L'expression (1) est bien connue des géomètres, et d'Alembert en fait usage pour démontrer un théorème de Lagrange. Le premier terme du second membre est l'équation proposée elle-même, multipliée par u . Le second terme contient une fonction que nous avons désignée par $'f(x, y, y' \dots)$. Cette fonction, que j'ai appelée conjuguée première, dans un Mémoire sur la composition des

(*) C'est par erreur que le théorème est attribué à M. Catalan.

équations différentielles, s'obtient en dérivant la proposée par rapport aux ordres différentiels, comme en Algèbre on dérive par rapport aux exposants. Si, par exemple, on a

$$f(x, y, y' \dots) = \frac{d^m y}{dx^m} + A \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + B \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots,$$

on trouvera

$$\begin{aligned} 'f(x, y, y' \dots) = m \cdot \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (m-1) A \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-2}} \\ + (m-2) B \frac{d^{m-3} y}{dx^{m-3}} + \dots \end{aligned}$$

Les fonctions $''f(x, y, y' \dots)$, $'''f(x, y, y' \dots)$, etc., correspondent aux dérivées secondes, troisièmes, . . .

Cela posé, supposons que u soit une fonction de x , développée ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned} u = a + be^{\alpha x} + ce^{2\alpha x} + de^{3\alpha x} + \dots \\ = M + N\alpha x + P\alpha^2 x^2 + \dots \end{aligned}$$

Faisons, pour plus de simplicité, $M = 1$, N positif. En portant cette valeur de u dans l'équation (1), on trouve

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} f[x, y, (yu)' \dots] &= f(x, y, y' \dots) (1 + N\alpha x + \dots) \\ + \alpha 'f(x, y, y' \dots) &(N + 2P\alpha x + \dots) \\ + \alpha^2 ''f(x, y, y' \dots) &(2P + \dots). \end{aligned} \right.$$

Ce développement fait voir que le premier membre et le premier terme du second membre resteront de même signe, quel que soit x , lorsque α sera infiniment petit, si l'on substitue pour y une fonction quelconque de x . Mais si cette fonction de x , que nous appellerons $\varphi(x)$, est une intégrale de la proposée (nous supposerons la constante qui la multiplie égale à 1), le premier terme du second membre sera identiquement nul; de sorte que, dans le cas de α positif et très-petit, le premier membre aura le même signe que $'f(x, y, y' \dots)$. Mais si, dans l'ex-

pression de u , on supposait α très-petit et négatif, le premier membre serait de signe contraire à $f(x, y, y' \dots)$. D'où résulte ce théorème : *Si, dans une équation différentielle linéaire, on substitue, au lieu de y ,*

$$\varphi x (1 + N \alpha x + \dots) \quad \text{et} \quad \varphi (x) (1 - N \alpha x + \dots),$$

$\varphi (x)$ étant une intégrale de cette équation, les deux substitutions donneront des résultats en x constamment de signes contraires si α est très-petit.

Le théorème suppose que $\varphi (x)$ ne soit pas une intégrale de la fonction $f(x, y, y' \dots) = 0$, car alors le changement de signe de α ne changerait pas le signe du second membre; mais le théorème subsisterait, si un nombre pair de fonctions f, f', f'', \dots , était annulé par $y = \varphi (x)$. Ce cas, qui correspond en Algèbre à celui des racines égales, entraîne pour la proposée, indépendamment de $\varphi (x)$, des intégrales $x \varphi (x), x^2 \varphi (x), x^3 \varphi (x), \dots$, en même nombre que les fonctions f, f', f'', \dots , annulées, comme on peut le démontrer par l'équation (2), et comme je l'ai fait voir dans un Mémoire de 1842.

Remarquons que si la fonction indéterminée u était représentée par $e^{\alpha x}$, les expressions $y_1 = e^{\alpha x} \varphi (x)$, $y_2 = e^{-\alpha x} \varphi (x)$ représenteraient des courbes au-dessus et au-dessous de la courbe $y = \varphi (x)$, fournie par l'intégrale.

Le théorème que nous avons énoncé a une réciproque évidente. Si, par exemple, deux substitutions $\varphi (x) e^{\alpha x}$, $\varphi (x) e^{-\alpha x}$ donnent, dans la proposée $f(x, y, y', \dots)$, des résultats en x constamment de signe contraire, α étant très-petit, $\varphi (x)$ sera une intégrale de cette proposée.