ANGELO GENOCCHI

Sur la question 81 (voir t. XIII, p. 132)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 248-254

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__248_1>

SUR LA QUESTION 81

(voir t. XIII, p. 132);

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

L'exemple des paraboles et hyperboles cité dans la note de la page 135 montre que la spirale logarithmique n'est pas la seule courbe qui puisse être égale à sa polaire. Ayant obtenu

$$\frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} = \frac{F'(\alpha - \omega)}{F(\alpha - \omega)},$$

on a conclu que, lorsque les fonctions f et F sont identiques, le rapport $\frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)}$ est constant, et cette conclusion serait juste si l'angle α était arbitraire ou si les angles φ et ω étaient indépendants ; mais ces conditions ne sont rien moins que nécessaires. Ainsi, pour la parabole

$$\rho = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi},$$

on trouvera

$$\cot\varphi = -2\tan\omega,$$

équation qui lie entre eux les angles φ et ω, et, de plus,

$$R = 4r^2 \frac{\sin(2\pi - \omega)}{\cos^2(2\pi - \omega)};$$

donc, en prenant

$$r = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 2\pi,$$

les fonctions f et F seront identiques, mais le rapport

$$\frac{\rho'}{\rho} = \cot\varphi + 2\,\mathrm{tang}\,\varphi$$

ne sera pas constant. Cela étant, la question 81 est encore à résoudre, car il ne suffit plus de remarquer que la courbe $\rho = \mathrm{tang}\,\varphi$ n'est pas une spirale logarithmique, pour en déduire qu'elle est différente de sa polaire.

Je chercherai la polaire de cette courbe par rapport à une conique quelconque

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0.$$

L'équation de la polaire d'un point (x_1, y_1) sera

$$axx_1 + byy_1 + c(xy_1 + x_1y) + d(x + x_1) + e(y + y_1) + f = 0,$$

et, en posant

$$t = -\frac{ax + cy + d}{dx + ey + f}, \quad u = -\frac{by + cx + e}{dx + ey + f},$$

on la mettra sous la forme

$$tx_1 + uy_1 = 1.$$

Soient

$$x_1 = \rho\cos\varphi, \quad y_1 = \rho\sin\varphi,$$

il viendra

$$\rho(t\cos\varphi + u\sin\varphi) = 1$$

Si donc le point (x_1, y_1) est pris sur la courbe proposée, cette équation, jointe à $\rho = \mathrm{tang}\,\varphi$ et à leurs dérivées relatives à ρ et φ, donnera l'enveloppe des polaires, c'est-à-dire la courbe polaire demandée. On trouvera

$$\frac{d\rho}{d\varphi}(t\cos\varphi + u\sin\varphi) = \rho(t\sin\varphi - u\cos\varphi), \quad \frac{d\rho}{d\varphi} = 1 + \rho^2,$$

et, par suite,

$$(1 + \rho^2)(t + u\rho) = \rho(t\rho - u),$$

ou

$$t + 2u\rho + u\rho^3 = 0;$$

d'ailleurs

$$\rho(t + u\rho) = \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1+\rho^2};$$

ainsi il s'agira d'éliminer ρ entre les deux dernières équations. On a

$$t + 2u\rho = -u\rho^3,\quad u\rho(1+\rho^2) = -(t+u\rho),$$
$$\rho^2(t+u\rho)^2 = 1 + \rho^2,$$

et, en multipliant membre à membre,

$$(t+u\rho)(t+2u\rho) = 1,$$

d'où

$$2u^2\rho^2 = 1 - t^2 - 3tu\rho,$$

et successivement

$$4u^3\rho^3 = u\rho(7t^2 + 2) - 3t(1-t^2) = -4u^2(t+2u\rho).$$

Résolvant cette équation par rapport à ρ, on formera les valeurs de $t + u\rho$ et $t + 2u\rho$, qu'on substituera dans

$$(t+u\rho)(t+2u\rho) = 1,$$

et il viendra

$$t^2(t^2+8)(4u^2+4t^2+5) = (8u^2+7t^2+2)^2;$$

enfin on remettra dans celle-ci les expressions de t et u, ce qui donnera une équation du sixième degré représentant la courbe cherchée. Or la courbe $\rho = \operatorname{tang}\varphi$ ne monte qu'au quatrième degré; on trouve, en effet,

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{y_1^2}{x_1^2},\quad \text{ou}\quad x_1^4 = y_1^2(1-x_1^2).$$

Voyons si l'équation de la polaire admet un diviseur rationnel du quatrième degré.

On peut représenter les expressions de t et u par

$$t = \frac{z_1}{z}, \quad u = \frac{z_2}{z},$$

où z, z_1, z_2 désignent trois fonctions linéaires de x et y (p. 249).

En faisant

$$T = t^2(t^2+8)(4u^2+4t^2+5) - (8u^2+7t^2+2)^2,$$
$$X = z_1^2(z_1^2+8z^2)(4z_2^2+4z_1^2+5z^2) - (8z_2^2+7z_1^2+2z^2)^2z^2,$$

on aura

$$T = z^{-6}X,$$

et $X = 0$ sera l'équation de la polaire. Si donc X a un diviseur rationnel de X′ du quatrième degré, on fera

$$X = X'X'',$$

et l'on aura

$$T = z^{-6}X'X''.$$

Mais il est facile de s'assurer que les expressions de t et u donnent

$$x = \frac{v_1}{v}, \quad y = \frac{v_2}{v},$$

où v, v_1, v_2 désignent trois fonctions linéaires de t et u, et il s'ensuit

$$X' = v^{-4}T', \quad X'' = v^{-2}T'',$$

T′ et T″ étant deux fonctions entières de t et u, la première du quatrième et la seconde du deuxième degré; on aura donc

$$T = (vz)^{-6}T'T'',$$

où vz sera égal à

$$ae^2 + bd^2 - 2cde - f(ab - c^2),$$

comme on peut le vérifier, et T admettra un diviseur rationnel T″ du deuxième degré. Ce diviseur ne sera pas indépendant de t, puisque dans T le coefficient de t^6 est 4, ni de u puisque le coefficient de u^4 est -64. Soit

$$T'' = kt^2 + Pt + Q,$$

et remarquons que si P n'est pas nul, T admettra aussi pour diviseur $kt^2 - Pt + Q$, car T ne change pas lorsqu'on change le signe de t; par conséquent, T aura pour diviseur le produit

$$(kt^2 + Pt + Q)(kt^2 - Pt + Q) = (kt^2 + Q)^2 - P^2t^2,$$

puisque ces deux facteurs ne peuvent pas avoir de diviseur commun, leur différence étant $2Pt$ qui n'a pas de diviseur commun avec T. Or si la fonction

$$(kt^2 + Q)^2 - P^2t^2$$

ne se réduit point d'elle-même au deuxième degré, en divisant T par cette fonction, on trouvera un quotient du deuxième degré et de la forme $kt^2 + Q$, qui sera aussi un diviseur de T. On peut donc supposer

$$P = 0 \quad \text{et} \quad T'' = kt^2 + Q,$$

et il faudra que l'équation $T = 0$ devienne identique en faisant

$$t^2 = -\frac{Q}{k} = q,$$

où q sera une fonction de u ne dépassant pas le deuxième degré; on trouvera, par cette substitution,

$$4\frac{(1+4u^2)^2}{q} = (q+8)(4u^2+4q+5) - 28(1+4u^2) - 49q,$$

et, par suite, q étant un diviseur de $(1 + 4u^2)^2$ ne pourra être que de la forme $k(1 + 4u^2)$; mais cette valeur ne rendra pas l'équation identique (*). Donc l'équation de

---

(*) Les théorèmes sur la divisibilité des polynômes sont démontrés, d'après M. Lefébure de Fourcy, dans l'*Algèbre* de MM. Choquet et Meyer. On peut suivre, pour le même objet, la marche que j'ai indiquée pour des théorèmes d'arithmétique (t. XIII, p. 426), et qui est applicable aussi pour démontrer les propositions fondamentales des *congruences irréductibles* (*Algèbre supérieure*, p. 345, 2e édition).

la polaire n'a aucun diviseur rationnel du quatrième degré et la courbe proposée n'est jamais égale à sa polaire (*).

En réduisant la conique directrice au cercle

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

on aura

$$t = \frac{x}{r^2}, \quad u = \frac{y}{r^2},$$

et l'on pourra transformer l'équation $t = 0$ en

$$(16r^2y)^2 = (3x - \sqrt{x^2 + 8r^4})^3 (x + \sqrt{x^2 + 8r^4}),$$

équation assez simple de la polaire. La discussion de la polaire peut être ramenée à cette équation, même dans le cas général ; d'ailleurs, en faisant

$$t^2 = t', \quad t^2 + u^2 = u',$$

on rabaisse T au deuxième degré par rapport à chacune des variables t' et u'.

On confirme les résultats précédents en cherchant combien de tangentes on peut mener d'un point (x, y) a la courbe donnée ; en effet, pour déterminer l'abscisse x_1 du point de contact, on trouvera l'équation du sixième degré

$$x_1^2 (xx_1^2 - x_1 + 2x)^2 - y^2 (1 - x_1^2)^3 = 0.$$

Je remarquerai qu'en général on obtient facilement l'équation différentielle de la polaire réciproque d'une courbe donnée. Soit

$$mx^2 + ny^2 = 1$$

la conique directrice, on n'aura qu'à remplacer, dans l'équation de la courbe donnée, x par $\frac{dy}{m(xdy - ydx)}$ et

(*) Nous avons donné cette longue discussion comme exemple très-utile, d'un fréquent emploi dans la discussion des courbes, lorsqu'il s'agit de reconnaître si une équation représente une courbe ou le système de plusieurs. Tm.

y par $-\dfrac{dx}{n(xdy - ydx)}$. En employant les coordonnées de M. Hesse $\dfrac{x}{z}$, $\dfrac{y}{z}$, soit $F = 0$ l'équation homogène de la courbe donnée et $\varphi = 0$ celle de la conique directrice; soit (F) ce que devient F par les substitutions

$$x = sx' + tx'', \quad y = sy' + ty'', \quad z = sz' + tz''.$$

En éliminant s, t entre les dérivées

$$\frac{d(F)}{ds} = 0, \quad \frac{d(F)}{dt} = 0,$$

on trouvera une équation de degré $n(n-1)$ (n étant le degré de F) entre les binômes alternés $[x'y'']$, $[y'z'']$, $[z'x'']$, qui deviendra celle de la polaire si l'on remplace ces binômes par les valeurs des dérivées $\dfrac{d\varphi}{dz}$, $\dfrac{d\varphi}{dx}$, $\dfrac{d\varphi}{dy}$ (*voyez* t. VIII, p. 120).