NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEBESGUE

Démonstration du théorème de Lexell

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 24-26

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__24_1>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE LEXELL;

Par M. LEBESGUE.

1. *Lemme.* Étant donnés sur une sphère deux cercles parallèles, situés de part et d'autre et à distances égales de l'équateur, les arcs de grands cercles interceptés entre

ces parallèles sont coupés en parties égales par l'équateur.

2. *Lemme.* Si l'on prend sur le premier parallèle un arc ab, et sur le second un arc $a'b'$ égal à ab et que l'on joigne les points a, a', b, b' par des arcs de grands cercles aa' bb', ces arcs sont égaux; les diagonales ab', ba' sont égales et se coupent mutuellement en parties égales, sur l'équateur; les triangles $aa'b$, $ba'b'$ sont égaux, et chacun est la moitié du quadrilatère sphérique $aba'b'$; de même les triangles $aa'b'$, abb'.

Observation. Le quadrilatère sphérique $a'b'ab$ a des propriétés analogues à celles du parallélogramme plan; nous le désignerons par le nom de *parallélogramme sphérique.*

3. *Théorème de Lexell.* Prenons sur le premier parallèle un arc cd égal à l'arc ab, et menons les arcs de grand cercle $a'c$, $b'd$; on aura un second parallélogramme sphérique $a'b'cd$; et on démontre, comme dans la géométrie plane, que le parallélogramme $a'b'cd$ est équivalent au parallélogramme $a'b'ab$; et, par conséquent, le triangle $a'b'c$, moitié du second parallélogramme, est équivalent au triangle $a'b'a$, moitié du premier parallélogramme.

Si par les points a', b' nous menons un arc de grand cercle $a'mb'$, il est évident que les deux triangles sphériques ayant pour base $a'mb'$ et leurs sommets en a et c sont équivalents. Il en est de même pour tous les triangles qui ont pour base $a'mb'$ et leurs sommets sur le parallèle $abcd$. C'est le théorème de Lexell (*voir* t. V, p. 22).

Note du Rédacteur. On trouve le théorème de Lexell dans les *Éléments de Géométrie* de M. Catalan (liv. VII, probl. VII).

4. Il est évident que le théorème subsiste pour les points correspondants a, a', b, b' de courbes quelconques, mais déterminées par *deux points*, par exemple, des lignes

loxodromiques; il subsiste aussi pour toutes les surfaces de révolution qui ont un équateur, en prenant toujours les parallèles à égale distance de l'équateur; les triangles ont pour côtés des lignes loxodromiques ou géodésiques.

5. Dans tous les triangles sphériques équivalents, la somme des angles est la même. Donc, si l'on fait la projection stéréographique de tous les triangles équivalents $a' b' a$, $a' b' b$, $a' b' c$, $a' b' d$, etc., on aura dans un même plan des triangles formés par des arcs de cercles, dans lesquels la somme des angles est constante, qui ont une base commune et dont les sommets sont sur une même circonférence.