SERRET

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 272-281
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__272_0>

BIBLIOGRAPHIE.

(voir t. XIII, p. 358).

Algèbre supérieure; par M. *Serret*.

Lemme. $F(y) = 0$ étant une équation de degré n et $\psi(y)$ un polynôme quelconque de degré $n-1$, la somme $\sum \frac{F(y)}{\psi(y)}$, étendue aux racines $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'équation

$$F(y) = 0,$$

(sans racines égales) a pour valeur le coefficient de y^{n-1} dans $\psi(y)$.

Démonstration. (Voir *Nouvelles Annales*, tome IX, p. 82; Abel Transon.)

Problème. *Soient les deux équations*

$$(1) \quad f(y) = y^m + p_1 y^{m-2} + p_2 y^{m-3} + \ldots + p_m = 0,$$

$$(2) \quad F(y) = y^n + q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots + q_n = 0,$$

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

qui ont une même racine commune, savoir y_1. *Il s'agit de calculer* $\varphi(y_1)$ φ *étant une fonction rationnelle entière.*

Représentons par $R_1, R_2, \ldots, R_n$ les n produits qu'on obtient en combinant $n-1$ à $n-1$ les quantités

$$f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n);$$

$f(y_1)$ étant zéro par hypothèse, il s'ensuit que R_1 n'est pas nul, et les autres R sont tous nuls comme renfermant le facteur $f(y_1)$. Donc on a les identités

$$R_1 = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum R,$$

$$R_1 \varphi(y_1) = R_1 \varphi(y_1) + R_2 \varphi(y_2) + \ldots$$
$$+ R_n \varphi(y_n) = \sum R\varphi(y),$$

et

$$\varphi(y_1) = \frac{\sum R\varphi(y)}{\sum R}$$

Ces deux sommes, étant des fonctions symétriques des racines de l'équation (2), sont des fonctions rationnelles connues des coefficients de cette équation ; mais on peut abréger considérablement le calcul par cette considération.

Soit $\theta(y)$ une fonction rationnelle quelconque, on voit qu'on a

$$R_1 \theta(y_1) = \sum R\theta(y),$$

$$R_1 \theta(y_1) \varphi(y_1) = \sum R\theta(y)\varphi(y),$$

donc

$$\varphi(y_1) = \frac{\sum R\theta(y)\varphi(y)}{\sum R\theta(y)};$$

faisons

$$\theta(y) = \frac{1}{F'(y)},$$

alors

$$\varphi(y_1) = \frac{\sum \frac{R\varphi(y)}{F'(y)}}{\sum \frac{R}{F'(y)}}.$$

R_μ est une fonction symétrique des racines de l'équation

$$\frac{F(y)}{y - y_\mu} = 0,$$

et, par conséquent, fonction rationnelle connue des coefficients $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et de y_μ; on a donc

$$R_\mu = \rho_0 + \rho_1 y_\mu + \rho_2 y_\mu^2 + \ldots + \rho_{n-1} y_\mu^{n-1};$$

les ρ sont des fonctions connues de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et l'on peut faire disparaître les puissances de y_μ supérieures à $n - 1$, au moyen de l'équation

$$y_\mu^n = - q_1 y_\mu^{n-1} - q_2 y_n^{-2} \ldots,$$

et, par le même raisonnement,

$$R_\mu \varphi(y_\mu) = t_1 + t_0 y_\mu + t_2 y_\mu^2 + \ldots + t_{n-1} y_\mu^{n-1}.$$

Donnant à μ toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots n$, les ρ et les t ne changent pas, et, d'après le lemme,

$$\sum \frac{R\varphi(y)}{F'(y)} = t_{n-1}, \quad \sum \frac{R}{F'(y)} = \rho_{n-1},$$

par conséquent,

$$\varphi(y_1) = \frac{t_{n-1}}{\rho_{n-1}}.$$

Si l'on voulait calculer la fonction rationnelle non entière $\frac{\varphi(y_1)}{\Phi(y_1)}$, on fera

$$\Phi(y_\mu) = T_0 + T_1(y_\mu) + \ldots + T_{n-1}(y_\mu^{n-1}),$$

et l'on aura

$$\frac{\varphi(y_1)}{\Phi(y_1)} = \frac{t_{n-1}}{T_{n-1}}.$$

Faisons

$$\varphi(y_1) = y_1,$$

on a

$$\begin{aligned} R_\mu y_m &= \rho_0 y_\mu + \rho_1 y_\mu^2 + \ldots + \rho_{n-1} y^n \\ &= \rho_0 y_\mu + \ldots + (\rho_{n-2} - q \rho_{n-1} \ldots) y_\mu^{n-1}, \end{aligned}$$

donc

$$y_1 = \frac{p_{n-2} - q p_{n-1}}{p_{n-1}} \dots;$$

il suffit donc de calculer les coefficients de y_μ^{n-1} et y_μ^{n-2} dans R_μ.

Cinquième Leçon (68-76). Pour démontrer le lemme cité, l'auteur a besoin de la décomposition en fractions simples d'une fonction rationnelle non entière ; c'est l'objet de la présente Leçon. Il fait usage de la méthode des coefficients indéterminés et ensuite de la méthode de M. Liouville (*Nouvelles Annales*, tome VI, p. 127).

Sixième Leçon (77-87). Même sujet ; théorie générale (*voir* FINCK, *Nouvelles Annales*, t. IV, p. 295). L'on démontre qu'une fraction rationnelle n'est décomposable que d'une seule manière en parties entières et en fractions simples (p. 80).

Septième Leçon (88-100). Même sujet ; facteurs trinômes avec ses deux applications ; conditions pour que l'intégrale d'une différentielle rationnelle soit algébrique ; détermination d'un terme général d'une série récurrente.

Les facteurs simples $x - a$, $x - b$, etc., peuvent représenter des distances de points situés sur une même droite à un point fixe pris sur cette droite (points-racines de Gauss), de sorte que la décomposition en fractions rationnelles donne certaines relations géométriques entre ces distances, et *vice versâ*. Ces relations étant établies à priori, on en déduit réciproquement les formules de la décomposition (*Géométrie supérieure*, page 235) (*).

(*) Il est peut-être à regretter qu'on n'ait pas adopté dans cet ouvrage les *points-racines* qui auraient considérablement abrégé les raisonnements, mnémonisé les riches résultats de cette admirable synthèse quasi-algébrique, où l'on fait un emploi continuel si ingénieux des signes $+$, $-$, $=$, $\sqrt{-1}$, ∞, explicitement ou implicitement.

Maclaurin en fournit aussi un exemple (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 443). La théorie de la décomposition en fractions rationnelles est le sujet d'une belle thèse doctorale de Jacobi; nous en avons fait la traduction que nous donnerons bientôt. C'est un premier pas, mais c'est le pas d'un lionceau.

Huitième Leçon (101-117). L'auteur revient aux fonctions symétriques relatives à un système d'équations et donne cette ingénieuse méthode de Poisson :

Soient p équations entre p inconnues $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$; supposons que ce système admet n solutions, savoir :

$$\begin{array}{l} x'_1,\ x'_2,\ x'_3, \ldots,\ x'_p, \\ x''_1,\ x''_2,\ x''_3, \ldots,\ x''_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ x_3^{(n)}, \ldots,\ x_p^{(n)}; \end{array}$$

il s'agit de trouver la valeur de la fonction symétrique qui a pour type

$$(x'_1)^{r_1}\ (x'_2)^{r_2} \ldots\ (x'_n)^{r_n};$$

les r sont des nombres entiers positifs donnés sans exclure zéro. Joignons au système une équation linéaire

$$t = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

où t est une nouvelle inconnue et les α sont des constantes indéterminées. Éliminant les p inconnues entre les $p+1$ équations, on obtient une équation de la forme

$$\psi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0,$$

équation de degré n, car elle a n racines ayant pour type

$$\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \ldots + \alpha_n x'_n.$$

Le développement de

$$\begin{array}{l} (\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \ldots + \alpha_n x'_n)^\mu \\ + (\alpha_1 x''_1 + \alpha_2 x''_2 + \ldots + \alpha_n x''_n)^\mu + \ldots \\ + (\alpha_1 x_1^{(n)} + \alpha_2 x_2^{(n)} + \ldots + \alpha_n x_n^{(n)})^\mu, \end{array}$$

où μ est un nombre entier positif, égal à

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

donne les termes de la forme

$$\frac{r_1!\, r_2!\, r_3! \ldots r_n!}{\mu!} \alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \ldots \alpha_n^{r_n} \sum x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n};$$

le signe $\sum$ indique qu'on doit remplacer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ successivement par $x'_1, x'_2, \ldots, x^n_1, x''_1, x''_2, \ldots, x''_n$. Mais la somme des puissances semblables des racines de l'équation en t donne

$$A \alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \ldots \alpha_n^{r_n},$$

où A désigne une quantité connue, et à cause de l'identité, on a donc

$$\sum x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n} = \frac{A \mu!}{A . r_1!\, r_2! \ldots r_n!}.$$

Connaissant les fonctions géométriques simples, on en déduit, par voie de multiplication, les fonctions symétriques composées.

Ce procédé donne aussi le moyen d'éliminer $p - 1$ inconnues entre p équations lorsque l'on sait éliminer $p - 2$ inconnues entre $p - 1$ équations et sert aussi à démontrer le théorème général de Bezout (p. 107).

On regrette de ne pas trouver ici ni la méthode d'élimination si ingénieuse de M. Sylvester, ni le théorème si important d'Euler, sur le degré auquel montent les coefficients des équations dans l'équation finale et qui est un corollaire de l'élimination par fonctions symétriques (voir *Nouvelles Annales*, tome IX, p. 228). Cette Leçon est terminée par la belle méthode de Tschirnhaus (pas Tschirnaüs) qui sert à faire disparaître d'une équation autant de termes que l'on veut et qui démontre que la résolution de l'équation de degré m dépend d'une résolvante de degré $m-1!$, résultat donné aussi par Lagrange.

Soit
$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$
posons
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n;$$

$n < m$; les a sont des constantes indéterminées. Éliminant x, l'équation en y sera aussi de degré m, car on a, en général,

$$y^p = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1},$$

où p est un nombre entier positif; les b sont des fonctions entières homogènes du degré p des indéterminées a_1, $a_2, \ldots, a_n$, et, au moyen de l'équation donnée, on peut ramener y^p à ne renfermer que des puissances de x inférieures à m. Donnant à p successivement les valeurs 1, 2, 3,..., m, on a m équations du premier degré entre les $m-1$ quantités x, $x^2, \ldots, x^{m-1}$. L'élimination, par la méthode de Cramer, donne donc l'équation en y de la forme

$$y^m + q_1 y^{m-1} + q_2 y^{m-2} + \ldots + q_m = 0.$$

Nommons S_p la somme des puissances p des racines de cette équation et s_p la somme analogue de l'équation donnée en x, on a

$$S_p = m b_0 + b_1 s_1 + b_2 s_2 + \ldots + b_{m-1} s_{m-1};$$

donc S_p est une fonction entière homogène des a de degré p. On a

$$S_1 + q = 0, \quad S_2 + q_1 S_1 + 2q_2 = 0, \ldots;$$

donc q_n est une fonction entière homogène des a et de degré n; donc, pour faire disparaître n termes consécutifs, il faut poser

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \ldots, \quad q_n = 0;$$

ce sont n équations homogènes entre $n+1$ indéterminées $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et, à cause de l'homogénéité, on peut poser $a_0 = 1$. On a n équations entre $n-1$ inconnues, et son élimination, d'après le théorème de Bezout, a une équation de degré $n!$. Faisant

$$n = m - 1,$$

on obtient

$$y^m + q_m = 0.$$

Ainsi la résolvante est du degré $m - 1!$.

On voit facilement que ce procédé donne la solution des équations du premier, deuxième, troisième et quatrième degré.

Pour faire disparaître le deuxième, troisième et quatrième terme de l'équation en y, on est donc amené à une équation du sixième degré; mais un géomètre anglais, nommé Jerrard, a réduit cette équation au troisième degré de la manière suivante. C'est l'objet de la *Note V* (p. 462).

Lemme. Une fonction homogène et entière du second degré de n quantités est la somme des carrés de n fonctions linéaires.

Démonstration. Soit

$$V = \varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}),$$

où φ désigne une fonction homogène entière du second degré; on peut écrire

$$V = P a_{n-1}^2 + Q a_{n-1} + R,$$

où P est une constante, Q une fonction linéaire homogène des $n-1$ quantités, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, et R une fonction homogène du deuxième degré des mêmes $n-1$ quantités; on a aussi

$$V = \left(a_{n-1}\sqrt{P} + \frac{Q}{2\sqrt{P}}\right)^2 + R - \frac{Q^2}{4P},$$

la première partie est le carré d'une fonction linéaire de

n quantités $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, et la deuxième partie est une fonction entière homogène du deuxième degré de $n-1$ quantités $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Traitant la seconde partie comme on a fait pour la fonction V, on voit qu'on pourra décomposer V en n carrés de fonctions linéaires respectivement de n, $n-1$, $n-2$, quantités.

Ceci étant démontré, prenons les équations

$$x^m + p_1 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4,$$

et l'équation

$$y^m + q_1 y^{m-1} + q_2 y^{m-2} + \ldots + q_m = 0;$$

pour faire disparaître les deuxième, troisième et quatrième termes, il faut poser

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0,$$

q_1 est fonction linéaire des cinq quantités a_0, a_1, a_2, a_3, a_4. Éliminant a_0 des deux dernières équations au moyen de la première, on a

$$q'_2 = 0, \quad q'_3 = 0,$$

où q'_2 est une fonction du deuxième degré des quatre quantités a_1, a_2, a_3, a_4, et, d'après le lemme, l'équation

$$q'_2 = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$f^2 + g^2 + h^2 + k^2 = 0,$$

f, g, h, k étant des fonctions linéaires. Posons

$$f = g\sqrt{-1}, \quad h = k\sqrt{-1},$$

l'équation sera satisfaite. On a ainsi deux équations binaires. Au moyen de ces deux équations, éliminant a_1, a_2 de $q' = 0$, on a une équation homogène du troisième degré entre a_3 et a_4. Posant $a_3 = 1$, on a une équation du troisième degré en a_4, et a_4 étant connue, on trouve immédiatement a_0, a_1, a_2 en raisonnant de la même manière. La disparition simultanée du deuxième, troisième et cinquième terme amène à une équation du quatrième degré. On peut aussi faire usage de l'équation aux racines inverses.

La résolution de l'équation du cinquième degré dépend donc de la résolution d'équations d'une de ces quatre formes

$$x^5 + px + q = 0,$$
$$x^5 + px^2 + q = 0,$$
$$x^5 + px^3 + q = 0,$$
$$x^5 + px^4 + q = 0.$$

Ainsi la question 41 est résolue (*Nouvelles Annales*, tome I, pages 396 et 447, note) si l'on peut choisir a_3 de manière que $p = 1$.

La fin prochainement.