Sur la résolution des équations transcendantes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 384-394

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__384_1>

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES

(voir page 304).

Méthode de M. Stern.

La méthode des séries, employée par Euler, Lagrange et M. Cauchy, est sujette à de graves inconvénients. Il y a d'abord la difficulté de reconnaître la continuité et la convergence, de reconnaître si l'on s'approche par excès ou par défaut, et, lorsqu'il existe plusieurs racines réelles, il est difficile de distinguer les séries correspondantes aux diverses racines, les équations peuvent avoir une infinité de racines, et, pour les racines imaginaires, une première approximation est déjà pénible à obtenir. C'est ce qui a engagé l'Académie des Sciences de Copenhague à proposer en 1837 la question : *De æquationum transcendentium radicibus indagandis.* M. le Dr Stern, célèbre analyste qui habite Göttingue et qui y cultive la science pour elle-même, a remporté le prix (*). Nous allons essayer de donner une idée de l'ouvrage couronné.

La racine d'une équation, soit algébrique, soit transcendante, est une quantité qui, substituée à la place de l'inconnue x, la réduit à zéro; dans une équation algébrique qui a pour facteur $x - \alpha$, on est autorisé à en conclure que α est une racine; il n'en est pas ainsi dans une équation transcendante. Si l'on a

$$f(x) = (x - \alpha)\,F(x) = 0,$$

(*) Venu à Paris pour voir l'Exposition.

posant

$$x = \alpha,$$

F (x) peut devenir infini. Par exemple, soit

$$\operatorname{tang} x = \sin x \operatorname{séc} x = 0,$$

on peut poser

$$\sin x = 0$$

et ensuite

$$\operatorname{séc} x = 0 ;$$

les racines de l'équation

$$\sin x = 0$$

annulent aussi $\operatorname{tang} x = 0$. En effet on a

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

(voir les *Tables* de Callet).

Ainsi

$$x = 0, \quad x = \pi, \quad x = 2\pi, \ldots,$$

et ces racines donnent

$$\operatorname{séc} x = 0 ;$$

donc, dans ce cas,

$$\operatorname{tang} x = 0 ;$$

mais les racines de $\operatorname{séc} x = 0$ sont évidemment imaginaires. Posons donc

$$x = y + zi,$$

alors

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})\cos y - \frac{1}{2} i (e^z - e^{-z})\sin y,$$

$$\sin x = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})\sin y + \frac{1}{2} i (e^z - e^{-z})\cos y .$$

On doit avoir, séc x étant nul,

$$\cos x = \infty ;$$

donc

$$z = \infty ,$$

et, par conséquent,

$$\sin x = \infty .$$

Ainsi, en posant

$$\text{séc}\, x = 0,$$

$\sin x$ devient infini et $\tan x$ n'est pas nul; en effet, on trouve alors

$$\text{tang}\, x = i.$$

Par conséquent, l'annulation d'un des facteurs n'annule pas le produit.

L'auteur fonde sa méthode sur ces trois théorèmes :

I. Théorème. *L'équation*

$$f(x) = 0$$

étant donnée, substituant successivement x_1, x_2 *à la place de* x, *si les valeurs de* $f(x_1), f(x_2)$ *sont de signes opposés, il existe une ou plusieurs racines de l'équation entre* x_1 *et* x_2; *s'il n'existe aucune racine entre* x_1 *et* x_2, *les valeurs de* $f(x_1)$, $f(x_2)$ *sont de même signe.*

Observation. Bien entendu que $f(x)$ est continue entre x_1 et x_2.

II. Théorème. *Si la fonction* $f(x)$ *et toutes ses dérivées restent continues entre* x *et* x + a, *on aura*

$$f(x+a) = fx + af'(x, x+a),$$

$$f(x+a) = fx + af'x + \frac{1}{2}a^2f''(x, x+a),$$

$$f(x+a) = f(x) + af'(x) + \frac{1}{2}a^2f''(x) + \frac{1}{2.3}f'''(x, x+a),$$

où (x, x + a) *représentent des quantités renfermées* *entre* x *et* x + a, *qui ne sont pas les mêmes dans chaque équation* (Moigno, *Calcul différentiel,* p. 34).

III. Théorème de Fourier. M. Ossian Bonnet en a donné une démonstration très-simple (*Nouvelles Annales*, tome III, page 119); rappelons seulement l'énoncé du théorème.

Soient f (x) *une fonction algébrique quelconque de degré* m, *et* α, β *deux nombres et* $\beta > \alpha$; *écrivons les deux suites*

$$(\alpha) \quad f^{(m)}(\alpha),\quad f^{(m-1)}(\alpha),\quad f^{(m-2)}(\alpha),\ldots,\quad f(\alpha),$$
$$(\beta) \quad f^{(m)}(\beta),\quad f^{(m-1)}(\beta),\quad f^{(m-2)}(\beta),\ldots,\quad f(\beta).$$

Les exposants indiquent des dérivations; les deux suites peuvent présenter le même nombre de variations, mais dans aucun cas la suite (β) n'a plus de variations que la suite (α). Lorsque la suite (β) a moins de variations, le nombre de racines réelles de l'équation comprises entre α et β ne peut jamais dépasser le nombre de variations perdues. Les pertes de variations proviennent: 1° de ce que des valeurs intermédiaires entre α et β annulent $f(x)$; 2° ou bien de ce que ces valeurs intermédiaires annulent une ou plusieurs des fonctions dérivées, et, dans ce cas, les variations disparaissent par couples et indiquent l'existence de racines imaginaires dans l'équation

$$f(x) = 0.$$

Le nombre de variations perdues pouvant tenir à l'une ou à l'autre de ces deux circonstances, on ne peut savoir, comme par le théorème de M. Sturm, le nombre *juste* des racines comprises, on a seulement une limite; mais, lorsque par la nature des fonctions dérivées on sait qu'une d'elles s'annule, alors le nombre de variations perdues indique le nombre de racines réelles renfermées entre α et β, et, en général, lorsque le nombre des variations perdues est *impair*, il existe au moins une racine réelle entre α et β.

Dans les fonctions algébriques, $f^{(m)}$ est toujours une constante et c'est à cette particularité qu'on doit de pouvoir compter le nombre de variations dans chaque suite (α) et (β) qui ne contiennent au plus chacune que m termes; mais dans les fonctions transcendantes on peut continuer les différentiations indéfiniment et il n'y a plus lieu au théorème de Fourier. Pour remédier à cet inconvénient, et c'est là le point fondamental de la méthode, M. Stern adopte pour $f^{(m)}$ une dérivée qui jouisse de la propriété qu'entre α et β elle ne change jamais de signe; c'est-à-dire que dans cet intervalle l'équation

$$f^{(m)}(x) = 0$$

n'a aucune racine, et il démontre qu'alors les suites (α) et (β) jouissent des mêmes propriétés que pour les équations algébriques, par des raisonnements analogues à ceux que l'on fait pour ce genre d'équations. Il nomme *dérivée déterminante* celle qui remplit cette condition, et *nombres déterminants* les nombres α et β, et, pour éviter la longueur des calculs, il choisit α et β de telle sorte, que m ne dépasse pas *deux* et qu'il n'y ait qu'une seule racine comprise, et qu'aucune racine des équations

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0$$

ne soit comprise entre ces nombres. Il est toujours possible d'avoir des limites si resserrées tant que $f'(x)$ et $f''(x)$ n'ont pas de facteurs communs; dans ce dernier cas, il faut chercher ce facteur et le mettre de côté. Ces limites étant trouvées, on cherche laquelle de ces limites substituée à la place des x dans $f(x)$ et $f''(x)$ donne même signe. C'est ce que l'auteur nomme la limite *extrême*. Si c'est α, alors on aura pour nouvelle limite une autre plus rapprochée $\alpha + \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$; si β est la limite extrême, $\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ sera une nouvelle limite; et on continue de même avec ces nouvelles limites. Lorsque les deux limites ne diffèrent plus que d'une unité décimale, on peut aller plus vite. Soit

$$\beta - \alpha = \left(\frac{1}{10}\right)^n :$$

on divise la plus grande des deux valeurs $f''\alpha$ et $f''\beta$ par la plus petite des deux valeurs $2f'(\alpha)$, $2f'(\beta)$ et soit $\left(\frac{1}{10}\right)^k$ l'unité décimale immédiatement plus grande que ce quotient; si n est plus petit que $1 - k$, on resserre les limites jusqu'à ce qu'on ait

$$n = 1 - k \quad \text{ou} \quad n > 1 - k;$$

alors, si β est la limite *extrême*, on développe le quotient $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ jusqu'à la décimale d'ordre $2n + k$; on augmente le dernier chiffre du quotient d'une unité et on *l'ajoute*, ainsi augmenté, à β, si $f(\beta)$ et $f'(\beta)$ sont de signes différents, ou bien on retranche de β, si $f(\beta)$ et $f'(\beta)$ ont même signe. La nouvelle valeur approchée β' peut être au-dessus ou au-dessous de la valeur de la racine; de quoi l'on peut s'assurer en substituant β' à la place de x dans $f(x)$: en tout cas, β' diffère de x d'une quantité moindre que $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$. Augmentant ou diminuant la dernière figure décimale de β' d'une unité, selon que β' est plus grand ou moindre que la racine, on aura de nouvelles limites ; et procédant avec celles-ci comme avec les précédentes, on parvient à des résultats exacts jusqu'à la $2n+k$, $4n+3k$, $8n+7k$ figure décimale.

Les applications suivantes éclairciront ce que l'exposé peut présenter d'obscur (*).

Il y a donc trois points essentiels qu'il faut avoir toujours présents dans l'application de cette méthode : 1° la recherche de la *fonction déterminante ;* 2° la recherche des nombres k et n ; 3° resserrer les limites jusqu'à ce que l'on ait

$$n \overset{=}{>} 1-k.$$

1^er^ *Exemple :*

$$x\log x - 100 = 0$$

(Euler, *Institut,* t. II, § 243) ; il s'agit de logarithmes hyperboliques.

$$f''(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = 1 + \log x, \quad f(x) = x\log x - 100\,;$$

3 et 4 sont des *nombres déterminants ;* car $f''(x)$ ne change pas de signe dans cet intervalle.

	$f''(x)$,	$f'(x)$,	fx,
	$+$	$+$	$-$
(3)	$\frac{1}{3}$,	2,098,	0,3093,
	$+$	$+$	$+$
(4)	$\frac{1}{4}$,	2,386,	0,940....

Ainsi la racine est entre 3 et 4.

$$4-3 = \left(\frac{1}{10}\right)^0,$$

(*) On en donnera plus tard la démonstration plutôt longue que difficile et qui aurait trop allongé cet article.

donc

$$n = 0.$$

$\frac{1}{3}$ est la plus grande des valeurs de $f''(x)$, 5,196 est la plus petite des valeurs de $2f'(x)$; donc

$$\frac{\frac{1}{3}}{5,196} = 0,07\ldots\ ,$$

on a

$$\left(\frac{1}{10}\right)^1 > 0,07;$$

donc

$$k = 1 \quad \text{et} \quad n = 1 - k.$$

Ainsi la condition est remplie. La limite extrême est 4, car cette limite donne même signe à $f''(x)$ et $f(x)$

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \frac{0,940}{2,386},$$

et comme $2n + k = 1$, il suffit de pousser la division jusqu'à la première décimale (*voir* p. 389).

Ainsi

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = 0,3;$$

augmentant cette décimale d'une unité, on a, pour première valeur approchée,

$$4 - 0,4 = 3,6;$$

on retranche parce que $f(\beta)$ et $f'(\beta)$ ont même signe (p. 389).

$f(3,6)$ est *positif*, donc 3,6 est trop grand et la racine est comprise entre 3,5 et 3,6; or

$$3,6 - 3,5 = \frac{1}{10},$$

donc

$$n = 1;$$

on a encore $k = 1$ et

$$n > 1 - k, \quad 2n + k = 3.$$

Il faut donc pousser le quotient $\frac{f(3,6)}{f'(3,6)}$ jusqu'à la troisième décimale et l'on obtient

$$\frac{f(3,6)}{f'(3,6)} = 0,002;$$

ainsi la seconde limite est

$$3,6 - 0,003 = 3,597,$$

approchée à un millième près. $f(3,597)$ est négatif, la racine est donc comprise entre 3,597 et 3,598; or 3,598 est la limite extrême:

$$\frac{f(3,598)}{f'(3,598)} = \frac{0,00163032}{2,28037813},$$

or

$$4n + 3k = 7;$$

il faut pousser jusqu'à la septième décimale, donc

$$\frac{f(3,598)}{f'(3,598)} = 0,0007149;$$

ainsi la troisième valeur approchée est

$$3,598 - 0,000715 = 3,597285,$$

exacte à $\left(\frac{1}{10}\right)$ près; de sorte que la racine est entre 3,5972850 et 3,5972851. Euler trouve 3,5972852.

2^e^ *Exemple :*

$$x - \cos x = 0$$

(Euler, *Introduction*, livre II, § 531); il est évident que cette équation n'a qu'une seule racine réelle.

$$f''(x) = \cos x, \quad f'(x) = 1 + \sin x, \quad f(x) = x - \cos x,$$

depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 90$ degrés, $\cos x$ conserve le même signe; donc $f'(x)$ peut être prise pour fonction déterminante;

$$0 - \cos 0 = -1, \quad 90^\circ - \cos 90^\circ = +90^\circ$$

donc il y a une racine entre 0 et 90 degrés; des limites plus resserrées donnent

	$f''(x)$,	$f'(x)$,	fx,
	+	+	—
(0,7),	0,764,	1,644,	0,064,
	+	+	+
(0,8),	0,696,	1,717,	0,103,

$$\frac{0,774}{2.1,644} = 0,2;$$

donc

$$k = 0,$$

car $\left(\frac{1}{10}\right)^0 > 0,2$;

$$n = 1, \quad n = 1 - k.$$

$$\frac{f(0,8)}{f'(0,8)} = \frac{0,103}{1,717}$$

(0,8 est la limite extrême). Il faut pousser jusqu'à la seconde décimale, car

$$2n + k = 2,$$

donc

$$\frac{0,103}{1,717} = 0,06;$$

première valeur approchée

$$0,8 - 0,07 = 0,73.$$

$f(0,73)$ est négatif; ainsi la racine est comprise entre 0,73 et 0,74.

$$\frac{f(7,4)}{f'(7,4)} = \frac{0,001531}{1,674} = 0,0009 \ (\text{car } 4n + k = 4);$$

seconde valeur approchée

$$0,74 - 0,001 = 0,739.$$

$f(0,739)$ est négatif; la racine est entre 0,739 et 0,7391.

$$\frac{f(0,7391)}{f'(0,7391)} = \frac{0,000024887}{1,67362} = 0,00001487$$

(car $8n + k = 8$);

troisième approximation

$$0,7391 - 0,00001488 = 0,73908512,$$

exacte jusqu'à la huitième décimale. Euler trouve 0,7390847.

La suite prochainement.