NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

IS. CHEVILLIER

Sur un théorème arithmologique d'Euler

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 433-435

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__433_1>

SUR UN THÉORÈME ARITHMOLOGIQUE D'EULER,

PAR M. IS. CHEVILLIER,
Professeur au lycée de Reims.

Euler, dans le n° 35 de la seconde partie de ses *Éléments d'Algèbre,* attire l'attention du lecteur sur une *propriété de la plus grande importance relativement à la nature des nombres.* Si j'ai bien compris ce passage, la proposition dont il s'agit est la suivante :

Si l'on peut trouver un nombre entier x *tel, que* $mx - b$ *divise* $mc + ab$, *la valeur correspondante de* y

donnée par l'équation

$$my - a = \frac{mc + ab}{mx - b}$$

sera pareillement entière.

En cherchant à démontrer cette proposition, j'ai trouvé qu'on ne peut l'affirmer que si m est premier avec le diviseur $mx - b = f$.

En effet, l'équation ci-dessus donne en y remplaçant $mx - b$ par f,

$$my = a + \frac{mc + ab}{f}.$$

Le second membre est entier par hypothèse, c'est-à-dire que l'expression $af + mc + ab$ est divisible par f. Elle est aussi divisible par m, car elle peut s'écrire

$$mc + a(f + b)$$

et

$$\frac{f + b}{m} = x$$

est supposé entier. Si donc m et f sont premiers entre eux, on peut affirmer que

$$y = \frac{mc + a(f + b)}{mf}$$

est entier; sinon cette valeur de y peut bien être fractionnaire.

Pour décider si ce défaut de généralité doit être imputé à la proposition elle-même ou à ma démonstration, j'ai eu recours à des exemples numériques.

Tout facteur premier commun à m et f devant diviser $mc+ab$, divisera nécessairement a ou b. Soient donc, par exemple

$$m = 6, \quad a = 2, \quad b = 3, \quad c = 9,$$

on aura

$$6y - 2 = \frac{60}{6x - 3}.$$

J'omets à dessein les simplifications. Les seuls diviseurs de 60 compris dans la formule $6x - 3$ sont 3 et 15, et aucun d'eux n'est premier avec 6. En donnant à x les valeurs correspondantes 1 et 3, on trouve pour y, $3\frac{2}{3}$ et 1. On voit donc que m *et* f *peuvent n'être pas premiers entre eux et que, si cette circonstance se présente,* y *pourra être entier ou fractionnaire.*