Pepin

Solution de la question 276

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 85-88

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__85_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 276

(voir t. XII, p. 259);

PAR M. L'ABBÉ PEPIN.

Trois points A, B, C étant liés de manière à conserver toujours les mêmes angles, si trois forces appliquées à ces points sont en équilibre, il faut, outre les conditions ordinaires, que les trois points et le point de rencontre des trois forces soient sur une même circonférence.

(MÖBIUS.)

Notations. x, y; x', y'; x'', y'', coordonnées rectangulaires des points A, B, C;

P, P', P'', forces appliquées respectivement aux points A, B, C;

a, b, c, angles des directions de ces forces avec l'axe des x;

θ, angle de la direction AB avec l'axe des x;

α, β, angles constants formés par les directions AC, BC avec la direction AB.

Les équations qui expriment les liaisons du système sont

$$\frac{y'-y}{x'-x}=\operatorname{tang}\theta,\quad \frac{y''-y}{x''-x}=\operatorname{tang}(\theta+\alpha),$$

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=\operatorname{tang}(\theta+\beta).$$

En posant

$$\operatorname{tang}\alpha=m,\quad \operatorname{tang}\beta=n,$$

on en déduira

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned} y' &= y+(x'-x)\operatorname{tang}\theta,\\ y'' &= y-\frac{n(m+\operatorname{tang}\theta)}{m-n}(x'-x),\\ x'' &= x\cdot\frac{m(1-n\operatorname{tang}\theta)}{m-n}-x'\cdot\frac{n(1-m\operatorname{tang}\theta)}{m-n}.\end{aligned}\right.$$

En différentiant ces équations, on obtient

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned} \delta y' &= \delta y+\frac{\delta\theta}{\cos^2\theta}(x'-x)+\operatorname{tang}\theta\,(\delta x'-\delta x),\\ \delta y'' &= \delta y-\frac{n\,\delta\theta}{(m-n)\cos^2\theta}(x'-x)\\ &\quad-\frac{n(m+\operatorname{tang}\theta)}{m-n}(\delta x'-\delta x),\\ \delta x'' &= \frac{mn.\delta\theta}{(m-n)\cos^2\theta}(x'-x)+\frac{m(1-n)\operatorname{tang}\theta}{m-n}\delta x\\ &\quad-\frac{n(1-m\operatorname{tang}\theta)}{m-n}\delta x',\end{aligned}\right.$$

Si dans l'équation

$$\sum(\mathrm{P}\cos a\,\delta x+\mathrm{P}\sin a\,\delta y)=0,$$

que fournit le principe des vitesses virtuelles, nous substituons les valeurs précédentes des variations $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$, en égalant ensuite à zéro les coefficients des variations arbitraires δx, δy, $\delta' x$, $\delta\theta$, nous obtiendrons les quatre équations suivantes, pour exprimer les conditions d'équilibre :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}
P\cos a - P'\sin b.\tan\theta + P''\cos c.\dfrac{m(1-n\tan\theta)}{m-n} \\
\qquad\qquad\qquad + P''\sin c.\dfrac{n(1-m\tan\theta)}{m-n} = 0, \\
P\sin a + P'\sin b + P''\sin c = 0, \\
P'\cos b + P'\sin b\tan\theta - P''\cos c.\dfrac{n(1-m\tan\theta)}{m-n} \\
\qquad\qquad\qquad - P''\sin c.\dfrac{m(1-n\tan\theta)}{m-n} = 0, \\
P'\sin b + P''\dfrac{(\cos c.mn - \sin c.n)}{m-n} = 0.
\end{array}\right.$$

La direction de l'axe des x étant arbitraire, nous ferons $\theta = 0$. De plus, nous remplacerons la première de ces équations par la somme obtenue en l'ajoutant à la troisième. Ces équations seront ainsi remplacées par le système suivant :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}
P\cos a + P'\cos b + P''\cos c = 0, \\
P\sin a + P'\sin b + P''\sin c = 0, \\
P'\cos b = P''.\dfrac{(\cos c + \sin c.m)n}{m-n}, \\
P'\sin b = P''.\dfrac{(\sin c - \cos c.m)n}{m-n}.
\end{array}\right.$$

Il y a cinq inconnues, les rapports des forces et les angles a, b, c ; on peut donc satisfaire d'une infinité de manières à ces quatre équations. Les deux premières expriment que la somme des projections des forces sur une direction quelconque est nulle. On pourrait aussi mettre en évidence l'équation des moments, qui exprime que les trois forces passent par un même point.

Divisons la quatrième équation par la troisième, nous aurons

$$\operatorname{tang} b = \frac{\sin c - \cos c \cdot \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\cos c + \sin c \cdot \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \operatorname{tang}(c - \alpha).$$

En donnant aux forces P′, P″ un signe convenable, nous pouvons admettre que les angles b et $(c - \alpha)$ sont compris entre o et π. Alors l'équation que nous venons d'obtenir équivaut à la suivante:

$$(5) \qquad b = (c - \alpha).$$

Or on voit aisément que les angles b et $c - \alpha$ sont mesurés par la moitié d'un même arc AD, quand le point d'intersection des forces D est situé sur la circonférence du cercle circonscrit et qu'ils ont des mesures inégales, quand cette condition n'est pas remplie. Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (5) soit vérifiée, est que le point d'intersection des forces soit situé sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle.