Nouvelles annales de mathématiques

Painvin

Description mécanique de certaines courbes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 139-154

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__139_1>

DESCRIPTION MÉCANIQUE DE CERTAINES COURBES;

PAR M. PAINVIN,

Docteur ès Sciences mathématiques, Répétiteur à l'institution Favart.

Étant donné un cercle fixe de centre C et un point fixe O, on imagine un rectangle invariable GHKL, emporté par un mouvement uniforme de rotation autour du point O, de sorte que l'axe AB de ce rectangle, égal au diamètre du cercle, passe constamment par ce point, et que les côtés GK et KL restent tangents à la circonférence.

On voit que cette dernière condition impose au rectangle un mouvement de glissement dans le sens de l'axe BA.

Ce mouvement se réalise dans l'industrie en adaptant un mécanisme très-simple au tour ordinaire.

Je fais abstraction du frottement.

§ I.

Je me propose d'abord de déterminer le mouvement d'un point quelconque du plan mobile GHKL.

Je prends, pour origine du temps, l'époque à laquelle le rectangle se trouve dans la position GHKL, et pour origine des coordonnées le point fixe O; les axes rectangulaires seront naturellement Ox et Oy, où OA est l'axe des x.

Soient

$OC = \alpha$,

ω la vitesse angulaire de rotation;

(a, b) les coordonnées OP, PM d'un certain point M par rapport aux axes fixes Ox et Oy, à l'origine du temps;

(x, y) les coordonnées du même point devenu M′ par rapport aux mêmes axes, à l'époque t.

Soit G′H′K′L′ la position du rectangle à cette époque t; si alors les coordonnées du point M′ par rapport aux axes mobiles ox' et oy' sont (x', y'), on aura les formules

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t,$$
$$y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t.$$

Or il est facile d'avoir x' et y'. En effet

$$a = \mathrm{OP}, \quad b = \mathrm{MP},$$
$$x' = \mathrm{OP}', \quad y' = \mathrm{M}'\mathrm{P}';$$

M′ étant la position du point M à l'époque t. Or la distance du point à l'axe des abscisses n'a pas changé pendant le mouvement; donc

$$y' = \mathrm{M}'\mathrm{P}' = \mathrm{MP} = b.$$

L'équation du cercle par rapport aux axes Ox et Oy étant

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = \mathrm{R}^2,$$

deviendra, en la rapportant aux axes ox' et oy',

$$x'^2 + y'^2 - 2\alpha(x'\cos\omega t - y'\sin\omega t) + \alpha^2 = R^2.$$

Soit OA′ l'abscisse d'une tangente parallèle à l'axe oy'. Faisons dans cette équation

$$x' = OA',$$

et exprimons que les deux racines sont égales; on aura

$$OA' = \alpha\cos\omega t + R.$$

Or pendant le mouvement, on a toujours

$$PA = P'A'$$

ou

$$a + R - a = \alpha\cos\omega t + R - x';$$

donc

$$x' = a - \alpha + \alpha\cos\omega t.$$

Les lois du mouvement du point M seront donc données par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} x = (a - \alpha)\cos\omega t - b\sin\omega t + \alpha\cos^2\omega t, \\ y = (a - \alpha)\sin\omega t + b\cos\omega t + \alpha\sin\omega t\cos\omega t, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(2)\quad \begin{cases} y\sin\omega t + x\cos\omega t = a - \alpha + \alpha\cos\omega t, \\ y\cos\omega t - x\sin\omega t = b. \end{cases}$$

L'élimination de t entre les équations (2) nous conduira à l'équation de la courbe décrite par le point M dans son mouvement

$$(3)\quad \begin{cases} [x(x - a) + y^2]^2 = (x^2 + y^2)[(a - \alpha)^2 + b^2] \\ + 2\alpha b[(a - \alpha)y - bx] + \alpha^2 b^2; \end{cases}$$

l'hypothèse $\alpha = 0$ donne un cercle; résultat qu'on pouvait prévoir.

En faisant

$$b = 0 \quad \text{et} \quad a = \alpha,$$

on voit que le point C décrit un cercle dont le diamètre est

$$OC = \alpha.$$

Si le point m est sur l'axe des x, c'est-à-dire si $b = 0$, l'équation de la courbe en coordonnées polaires sera

$$r = \alpha \cos\theta \pm (a - \alpha);$$

c'est l'équation du limaçon de Pascal.

Il faut prendre le signe $+$, car pour $t = 0$ on doit avoir

$$x = r\cos\theta = a,$$
$$y = r\sin\theta = 0,$$

et, par conséquent,

$$r = a \quad \text{pour} \quad \theta = 0.$$

Si l'on prend toujours sur l'axe Ox deux points dont les abscisses soient respectivement a et $a + 2\alpha$, ces deux points décriront la même courbe; mais pour les superposer, il faudra tourner l'une d'elles de 180 degrés.

Je bornerai à ces quelques mots la discussion de ce problème, pour envisager le mouvement sous un autre point de vue.

§ II.

Imaginons un second rectangle *ghkl* animé d'un mouvement semblable au mouvement défini au commencement de cet article et autour d'un nouveau cercle; le centre du nouveau cercle fixe étant en c, et le centre de rotation en o, un crayon est fixé en un certain point μ du deuxième plan mobile *ghkl*, perpendiculairement à ce plan; il s'agit de trouver la courbe que le crayon décrira sur le premier plan mobile GHKL.

Je suppose qu'à l'origine du temps les deux rectangles ont les positions respectives GHKL et *ghkl*.

Je suppose encore les deux plans parallèles ; et même, pour résoudre la question, on peut regarder les deux plans mobiles comme situés dans un seul et même plan.

Un point fixe (a, b) du premier plan GHKL occupera à l'époque t, par rapport aux axes fixes Ox et Oy, tracés dans le plan du cercle C, une position (x, y) déterminée par les formules

$$(4) \quad \begin{cases} y \sin \omega t + x \cos \omega t = a - \alpha + \alpha \cos \omega t, \\ y \cos \omega t - x \sin \omega t = b, \end{cases}$$

d'après les conclusions du § I.

Un point fixe (a', b') du deuxième plan *ghkl* occupera à l'époque t par rapport aux axes $o\xi$ et $o\eta$, une position (ξ, η) déterminée par les formules

$$(5) \quad \begin{cases} \eta \sin \Omega t + \xi \cos \Omega t = a' - \beta + \beta \cos \Omega t, \\ \eta \cos \Omega t - \xi \sin \Omega t = b', \end{cases}$$

Ω étant la vitesse angulaire de rotation de ce deuxième système et $\beta = oc$.

Or si (p, q) sont les coordonnées de o par rapport aux axes Ox et Oy, (m, n) les coordonnées du point (a', b') ou μ par rapport à ces mêmes axes, et (X, Y) les coordonnées par rapport à Ox, Oy du point (ξ, η), on aura

$$\xi = X - p, \quad a' = m - p,$$
$$\eta = Y - q, \quad b' = n - q,$$

les formules (5) deviendront

$$(6) \begin{cases} (Y - q) \sin \Omega t + (X - p) \cos \Omega t = m - p - \beta + \beta \cos \Omega t, \\ (Y - q) \cos \Omega t - (X - p) \sin \Omega t = n - q. \end{cases}$$

Ces équations donneront à l'époque t la position (X, Y)

du point fixe (m, n) du deuxième plan par rapport aux axes Ox et Oy.

Les équations (4) déterminent les coordonnées (x, y) à l'époque t du point du plan mobile GHKL qui avait pour coordonnées (a, b) à l'origine du mouvement, par rapport aux axes fixes Ox et Oy tracés dans le plan du cercle C.

Si l'on change x et y en a et b et réciproquement, on aura les équations suivantes :

$$(7) \qquad \begin{cases} b\cos\omega t - a\sin\omega t = y, \\ b\sin\omega t + a\cos\omega t = x - \alpha + \alpha\cos\omega t, \end{cases}$$

qui déterminent les coordonnées *primitives* (x, y) du point mobile qui est en (a, b) à l'époque t; les coordonnées (a, b) étant rapportées aux axes fixes Ox et Oy tracés dans le plan du cercle; les coordonnées (x, y) étant rapportées aux axes Ox_1 et Oy_1 tracés dans le plan GHKL, fixes dans ce plan, mais mobiles avec lui. Si pour point (a, b) on prend (X, Y), les coordonnées (x, y) représentent la position *primitive* (par rapport aux axes Ox et Oy) et *actuelle* (par rapport aux axes $Ox_1\ Oy_1$) du point qui, à l'époque t, se trouve sous le crayon (m, n).

Donc en associant les équations (7) et les suivantes :

$$(8) \qquad \begin{cases} (b - q)\sin\Omega t + (a - p)\cos\Omega t = m - p - \beta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \beta\cos\Omega t, \\ (b - q)\cos\Omega t - (a - p)\sin\Omega t = n - q, \end{cases}$$

et en éliminant a, b et t, on obtient la courbe décrite par le crayon, fixé en (m, n), sur le plan mobile GHKL et rapportée aux axes mobiles Ox_1 et Oy_1 tracés dans ce plan, qui coïncident avec les axes fixes Ox et Oy à l'origine du mouvement; et, par conséquent, si l'on veut seulement connaître la nature et la forme de cette courbe,

rien ne s'oppose à ce qu'on prenne pour axes Ox et Oy.
Éliminons d'abord a et b entre ces équations, on trouvera

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &(n-q)\cos kt+(m-p-\beta)\sin kt\\ &+\beta\cos\Omega t\sin kt=y-q\cos\omega t+p\sin\omega t\\ &-(n-q)\sin kt+(m-p-\beta)\cos kt\\ &+\beta\cos\Omega t\cos kt=x-\alpha+\alpha\cos\omega t\\ &-q\sin\Omega t-p\sin\omega t,\end{aligned}\right.$$

où

$$k=\Omega-\omega.$$

En éliminant t entre ces deux équations, on aura la courbe cherchée.

La discussion de ces équations présente des cas nombreux et intéressants.

I.

$$\Omega=0.$$

Le deuxième plan $hgkl$ est immobile, on a donc la courbe décrite par un crayon présenté au point (m, n) sur le plan HGKL.

Cette hypothèse introduite dans les équations (9) donne

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &m\cos\omega t-m\sin\omega t=y,\\ &n\sin\omega t+m\cos\omega t=x-\alpha+\alpha\cos\omega t.\end{aligned}\right.$$

L'élimination de t conduit à l'équation de la courbe décrite

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &[(m-\alpha)^2+n^2]y^2+2\alpha n(x-\alpha)y\\ &+(m^2+n^2)(x-\alpha)^2=[m(m-\alpha)+n^2]^2.\end{aligned}\right.$$

On voit que c'est une ellipse dont le centre est en C.

C'est en effet le moyen employé par les tourneurs pour décrire des ellipses.

Examinons quelques cas particuliers.

Si l'on suppose $n = 0$, on a une ellipse dont les axes sont dirigés suivant Cx et CY; le grand axe est dirigé suivant CY tant que $m > \frac{\alpha}{2}$; il est dirigé suivant Cx, lorsque $m < \frac{\alpha}{2}$.

Si l'on a, en même temps que $n = 0$,

$$m = 2\alpha,$$

le grand axe est double du petit;

$$m = \alpha,$$

le crayon décrit une droite égale à 2α suivant l'axe CY;

$$m = \frac{\alpha}{2},$$

la courbe décrite est un cercle qui a pour rayon $\frac{\alpha}{2}$;

$$m = 0,$$

le crayon décrit une droite égale à 2α suivant l'axe Cx;

$$m = -\frac{\alpha}{2},$$

le grand axe est triple du petit.

Revenons à l'équation générale (11).

Si l'on prend deux points qui aient respectivement pour coordonnées (m, n) et $(\alpha - m, n)$, les deux ellipses décrites seront égales, mais inversement disposées.

Si $m = \frac{\alpha}{2}$, l'ellipse a ses axes dirigés suivant les bissectrices des angles YCx. Si en même temps

$$n = \pm \frac{\alpha}{2},$$

le crayon décrira suivant les bissectrices deux droites de longueur 2α.

II.

$$\beta = 0, \quad p = 0, \quad q = 0.$$

On a alors un plan tournant autour du point O; il s'agit de trouver la courbe décrite sur le plan CHKL par un crayon fixé au point (m, n) sur le premier plan *ghkl*.

Introduisons ces hypothèses dans les équations (9) et éliminons t; on trouve

$$(12)\quad y = \rho \sin\left\{\gamma + \frac{\Omega - \omega}{\omega} \operatorname{arc}\left[\cos = \frac{-(x-\alpha) \pm \sqrt{\rho^2 - y^2}}{\alpha}\right]\right\};$$

$$m = \rho\cos\gamma, \quad n = \rho\sin\gamma.$$

Cette formule peut se transformer dans la suivante :

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} x - \alpha = \pm\sqrt{\rho^2 - y^2} \\ \quad - \alpha\cos\left\{\dfrac{\omega}{\Omega - \omega}\left[-\gamma + \operatorname{arc}\left(\sin = \dfrac{y}{\rho}\right)\right]\right\}. \end{array}\right.$$

Si l'on remonte aux équations qui ont servi pour l'élimination, on en déduira (en remarquant qu'on doit avoir en même temps

$$t = 0, \quad x = m, \quad y = n)$$

que le radical $\sqrt{\rho^2 - y^2}$ ne doit entrer qu'avec le signe $+$ dans les équations (12) et (13).

Si $m = 0$ et $n = 0$, le crayon décrira suivant l'axe des x une longueur égale à 2α.

Examinons quelques cas correspondants aux différentes valeurs du rapport $\frac{\Omega}{\omega}$.

1°.

$$\Omega = \omega.$$

Le crayon décrira une droite égale à 2α parallèle à l'axe des x, et à une distance n de cet axe.

2°.

$$\Omega = 2\omega.$$

La courbe décrite aura pour équation

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &[(m-\alpha)^2+n^2]y^2+2\alpha n(x-\alpha)y \\ &+(m^2+n^2)(x-\alpha)^2=[m(m-\alpha)+n^2]^2. \end{aligned}\right.$$

En comparant cette équation avec l'équation (11), on voit que l'ellipse décrite au moyen de ce mécanisme lorsque

$$\Omega = 2\omega,$$

est égale à l'ellipse décrite par un crayon présenté au point (m, n) à l'origine du mouvement, et qu'elle a la même position dans le plan GHKL; on reproduira toutes les variétés examinées à cette occasion.

3°.

$$\omega = 2\Omega.$$

Cette hypothèse permet de transformer immédiatement l'équation (13) qui prend alors la forme suivante :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} x-\alpha = {} & \frac{\rho^4-4\alpha mny}{\rho^4}\sqrt{\rho^2-y^2} \\ & +\frac{\alpha(m^2-n^2)}{\rho^4}(\rho^2-2y^2), \end{aligned}\right.$$

où

$$\rho^2 = m^2+n^2.$$

4°.

$$\Omega = -\omega.$$

Dans ce cas, la formule (13) devient

$$(16)\quad x-\alpha=\sqrt{\rho^2-y^2}-\frac{\alpha}{2\rho}\left[\begin{aligned} &\sqrt{(\rho+m)(\rho+\sqrt{\rho^2-y^2})} \\ +&\sqrt{(\rho-m)(\rho+\sqrt{\rho^2-y^2})} \end{aligned}\right].$$

Si l'on a égard aux formules

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} + \sqrt{\frac{A - C}{2}},$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} - \sqrt{\frac{A - C}{2}},$$

où

$$C = \sqrt{A^2 - B},$$

on aura

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & x - \alpha = \sqrt{\rho^2 - y^2} - \frac{\alpha}{2\rho} \\ & \times \left[\begin{aligned} & \left(\sqrt{\rho + m} + \sqrt{\rho - m}\right) \sqrt{\frac{\rho + y}{2}} \\ + & \left(\sqrt{\rho + m} - \sqrt{\rho - m}\right) \sqrt{\frac{\rho - y}{2}} \end{aligned} \right]; \end{aligned} \right.$$

les radicaux étant pris avec les signes dont ils sont affectés. Sous cette forme, l'équation de la courbe se prête à une discussion facile.

Lorsque

$$\Omega = i\omega,$$

i étant un nombre entier positif ou négatif, l'équation (13) devient algébrique ; mais je me dispenserai de reproduire les calculs, qui me semblent fort compliqués.

III.

$$\beta = 0.$$

On a un plan tournant uniformément autour du point fixe (p, q) ; il s'agit de trouver la courbe décrite sur le plan mobile GHKL par un crayon fixé au point (m, n) sur le premier plan.

On a les équations suivantes entre lesquelles il faut éliminer la variable t,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &(n-q)\cos(\Omega-\omega)t+(m-p)\sin(\Omega-\omega)t\\ &=y-q\cos\omega t+p\sin\omega t\\ &-(n-q)\sin(\Omega-\omega)t+(m-p)\cos(\Omega-\omega)t\\ &=x-\alpha+\alpha\cos\omega t-q\sin\omega t-p\cos\omega t. \end{aligned}\right.$$

On pourrait effectuer l'élimination de t, mais les calculs seraient fort compliqués. Je me contenterai d'examiner les cas particuliers les plus simples.

1°.

$$m=p,\quad n=q.$$

On arrive au même résultat qu'en présentant un crayon au point (p, q) à l'origine du mouvement sur le plan HGKL, ce que l'on voit à priori.

2°.

$$q=0,\quad p=\alpha.$$

Le centre de rotation du plan *ghkl* est au point C. L'élimination de t conduit à l'équation suivante :

$$(19)\quad x-\alpha=r\cos\left\{\gamma+\frac{\Omega-\omega}{\omega}\operatorname{arc}\left[\sin=\frac{-y+\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}{\alpha}\right]\right\},$$

où l'on a posé

$$m-\alpha=r\cos\gamma,$$
$$n=r\sin\gamma,$$

équation qui a une grande analogie avec l'équation (12) et qu'on peut soumettre aux mêmes hypothèses et aux mêmes transformations.

3°.

$$\Omega=\omega.$$

On est conduit à l'équation

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &[(p-\alpha)^2+q^2]Y^2+2\alpha qXY+(p^2+q^2)X^2\\ &=[p(p-\alpha)+q^2]^2, \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$X = x - \alpha - (m - p),$$
$$Y = y - (n - q).$$

Remarquons que la grandeur de l'ellipse ne dépend que de la position du centre de rotation (p, q) ; et quelle que soit la position du crayon en (m, n), on décrira toujours la même ellipse pour les mêmes valeurs de p et q; il n'y aura de variable que le centre de la courbe et la direction de ses axes.

Si $q = 0$, l'ellipse se trouve rapportée à ses axes.

4°.

$$\Omega = 2\omega.$$

L'équation de la courbe décrite sera.

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &[n - 2q)^2 + (m - \alpha)^2]\, y^2 \\ &+ 2[4pq + n\alpha - 2qm - 2pn]\, y(x - \alpha) \\ &+ [n^2 + (m - 2p)^2](x - \alpha)^2 \\ &= [n(n - 2q) + (m - \alpha)(m - 2p)]^2. \end{aligned}\right.$$

Dans ce cas, la grandeur de l'ellipse dépend de la position du centre de rotation et de la position du cra

Lorsque

$$m = 2p \quad \text{et} \quad n = 2q,$$

on a une droite dont l'équation est

$$y = \frac{2q}{2p - \alpha}(x - \alpha)$$

et dont la longueur est

$$2\sqrt{(2p - \alpha)^2 + 4q^2}.$$

Les valeurs

$$n = 0,$$
$$m = 2p,$$

ou

$$n = 2q,$$
$$m = \alpha$$

donnent les droites

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad x = \alpha.$$

Lorsque le centre de rotation (p, q) est quelconque, et qu'on place le crayon en un point déterminé par les valeurs

$$\left(m = p + \frac{\alpha}{2}, \quad n = q\right),$$

la courbe décrite sera un cercle qui a pour équation

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = \left(p - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + q^2.$$

Si on laisse la position (m, n) du crayon arbitraire, on aura un cercle lorsque le centre de rotation aura pour coordonnées

$$q = 0,$$
$$p = \frac{\alpha}{2}$$

ou

$$q = n,$$
$$p = m - \frac{\alpha}{2}.$$

Dans ces deux cas, qui sont les seuls, le cercle aura pour équation

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = n^2 + (m - \alpha)^2.$$

IV.

Abordons le cas général où la quantité β n'est pas nulle. La solution de la question sera donnée par les équations (9).

Laissant de côté un certain nombre de cas où l'élimination est possible, mais compliquée, je n'examinerai que deux hypothèses particulières.

1°.

$$2p = \alpha, \quad q = 0.$$

On trouve

$$\cos 2\omega t = \frac{-(m-\alpha-\beta)+\sqrt{y^2+(x-\alpha)^2-n^2}}{\beta}.$$

Il est alors facile d'avoir l'équation de la courbe et de discuter les différents cas relatifs aux hypothèses qu'on peut faire sur les paramètres m, n et β.

2°.

$$\Omega = \omega.$$

La courbe décrite est une ellipse qui a pour équation

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} [q^2+(p-\alpha+\beta)^2]\mathrm{Y}^2+2q(\alpha-\beta)\mathrm{XY} \\ +(p^2+q^2)\mathrm{X}^2=[q^2+p(p-\alpha+\beta)]^2, \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= x-\alpha+\beta-(m-p), \\ \mathrm{Y} &= y-(n-q). \end{aligned}$$

La grandeur de ces ellipses ne dépend que de la position du centre de rotation (p, q) et des paramètres α et β.

Si $\alpha = \beta$, on a un cercle dont le rayon est constant pour toutes les valeurs de m et n. Si $p = 0$ et $q = 0$, ce cercle se réduit à un point.

Ne voulant pas donner trop d'extension à cet article, je n'entrerai pas dans plus de détails sur ces questions.

Note du Rédacteur. Familiarisé avec les considérations cynématiques et les procédés de la géométrie descriptive, le savant professeur se propose de publier une nouvelle édition de l'*Art du tourneur* de Bergeron. Sorti de mains si habiles, un tel ouvrage sera recherché par les artistes, les technologues et les géomètres.