

JAUFROID

Théorèmes sur les erreurs relatives

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 154-157

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__154_2

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES SUR LES ERREURS RELATIVES;

PAR M. JAUFROID,

Professeur à Toulon.

On démontre que si sur la gauche d'un nombre on prend un certain nombre de chiffres à partir du premier chiffre significatif, en remplaçant par des zéros les unités des différents ordres qu'on néglige, on fait une erreur relative plus petite qu'une fraction ayant pour numéra-

teur l'unité et pour dénominateur le premier chiffre significatif à gauche suivi d'autant de zéros qu'il y a de chiffres conservés moins un, et dans tous les cas plus petits qu'une décimale d'un ordre marqué par le nombre des chiffres conservés moins un, et plus petite qu'une demi-décimale de ce même ordre si le premier chiffre significatif à gauche est différent de l'unité.

Ce que nous voulons remarquer, c'est que ces trois limites existent encore lorsqu'on force l'unité sur le premier chiffre conservé à droite; cela tient à ce que l'erreur absolue a la même limite supérieure que dans le premier cas.

En effet, soit 63,789; on prend 63,8, on a

$$\text{erreur absolue} = 0,011 < 1 \text{ dixième},$$

$$\text{erreur relative} = \frac{0,011}{63,789} < \frac{1 \text{ dixième}}{600 \text{ dixièmes}} < \frac{1}{600},$$

d'où l'on tire les trois limites citées précédemment.

Cette remarque sert à établir le théorème suivant :

Si N' représente un nombre N avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$, par exemple, et *en moins*, on pourra dans le développement de N' s'arrêter au quatrième chiffre significatif à gauche en le forçant d'une unité, et on aura encore le nombre N avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, mais en plus ou en moins.

Soit 37,4875 la valeur de N approchée en moins avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$. On a

$$37,4875 < N < 37,4875 + \frac{N}{1000}.$$

Mais, d'après la remarque faite précédemment, si sur la

gauche de 37,4875 je prends les quatre premiers chiffres significatifs en forçant le dernier d'une unité, le nombre 37,49 représente 37,4875 avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, mais en plus; on a donc

$$37,4875 < 37,49 < 37,4875 + \frac{37,4875}{1000},$$

à fortiori

$$37,4875 < 37,49 < 37,4875 + \frac{N}{1000},$$

car on a

$$N > 37,4875$$

par hypothèse.

Il suit de là que les deux nombres N et 37,49 sont compris entre deux limites qui diffèrent de $\frac{N}{1000}$; ils diffèrent donc entre eux de moins de $\frac{N}{1000}$, c'est-à-dire que 37,49 représente N avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, mais en plus ou en moins.

Application. Calculer avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$ le carré du rayon du cercle dont la surface est $\sqrt{2}$.

On a

$$R^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3,141 est en moins le dividende avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1000}$.

1,4142 étant les cinq premiers chiffres de $\sqrt{2}$, 1,4143

est en plus le diviseur avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{10000}$, à fortiori plus petite que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1000}$.

On a donc pour R^2 , en moins et avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, la fraction $\frac{3,141}{1,4143}$,

On trouve pour les quatre premiers chiffres de son développement 2,220; donc 2,221 représente le carré du rayon avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, mais en plus ou en moins.