FÉLIX LUCAS

Solution de la question 318 (Chasles)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 157-159
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__157_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 318 (CHASLES);

PAR M. FÉLIX LUCAS,
Élève de l'École Polytechnique.

1°. La courbe à double courbure du quatrième ordre provenant de l'intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont parallèles, est telle, que la somme des distances de chacun de ses points aux sommets des deux cônes, multipliés respectivement par des constantes, est constante. Cette courbe, comme les ovales de Descartes, a un troisième foyer.

Considérons les axes comme verticaux.

Lemme. La courbe d'intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont verticaux est sur un troisième cône de révolution dont l'axe est aussi vertical (*voir* plus bas).

En coupant les deux cônes par le plan de leurs axes, j'obtiens deux couples de droites (A, B), (A', B') également inclinées sur la verticale. Je regarde ces droites comme côtés opposés d'un quadrilatère dont je construis les diagonales A″ et B″. Il est facile de reconnaître, d'après les propriétés du quadrilatère, que A″ et B″ sont également inclinés sur la verticale (*Géom. sup.*, n° 348); je puis donc les regarder comme la section méridienne d'un cône circulaire droit et vertical. Or les trois cônes (A, B), (A′, B′), (A″, B″) se coupent deux à deux suivant la même courbe.

Pour le prouver, menons un plan horizontal quelconque, et désignons par LT sa trace sur le tableau. Les six droites A, B, A′, B′, A″, B″ coupent LT aux points (a, b), (a', b'), (a'', b'') qui forment trois couples en involution, puisque ces droites sont les côtés et les diagonales d'un quadrilatère (*Géom. sup*, n° 339). Les cercles décrits sur les diamètres a, b, a', b', a'', b'' dans le plan horizontal représentent les sections faites par ce plan dans les trois cônes; mais à cause de l'involution des six points, ces trois cercles ont une corde commune (*Géom. sup*, n° 302); les extrémités de cette corde sont les intersections de notre plan horizontal avec la courbe d'intersection de deux quelconques des trois cônes.

Comme cela a lieu quel que soit le plan horizontal que l'on considère, on en conclut que les trois cônes se coupent deux à deux suivant la même courbe.

Cela posé, j'appelle

S et S′ les sommets des deux cônes donnés;

S″ le sommet du cône auxiliaire;

α, α', α'' les demi-angles au sommet des trois cônes;

d et d_1 les distances verticales S, S′ et S, S″.

Si je coupe les trois cônes par un plan horizontal mené à la distance variable h du point S, les points de la courbe commune aux trois cônes que contiendra ce plan ont pour distances aux trois sommets les longueurs

$$\delta = \frac{h}{\cos\alpha}, \quad \delta' = \frac{h-d}{\cos\alpha'}, \quad \delta'' = \frac{h-d_1}{\cos\alpha''}.$$

On a donc

$$\delta - \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}\delta' = \frac{d}{\cos\alpha},$$

$$\delta - \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha}\delta'' = \frac{d_1}{\cos\alpha},$$

$$\delta' - \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha'}\delta'' = \frac{d_1 - d}{\cos\alpha'},$$

et, par conséquent, les trois sommes

$$\delta - \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}\delta', \quad \delta - \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha}\delta'', \quad \delta' - \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha'}\delta'',$$

sont constantes quel que soit h, c'est-à-dire constantes pour tous les points de la courbe.

On conclut de là que S, S′, S″ sont les trois foyers de la courbe.

2°. Le lemme sur lequel je m'appuie est une conséquence du théorème suivant :

Quand deux cônes du deuxième degré ont une direction cyclique commune et leurs axes (lieux des centres des sections circulaires) situés dans un même plan, leur courbe d'intersection peut être placée sur un troisième cône du deuxième degré ayant son axe dans le plan de leurs axes, et un de ses plans cycliques parallèles à leur direction cyclique commune.

L'axe de ce nouveau cône s'obtient en joignant le point de concours des axes des deux cônes donnés au point d'intersection des deux diagonales du quadrilatère qui résulte des sections faites dans les deux cônes par le plan de leurs axes; et ces deux diagonales sont elles-mêmes la section du cône auxiliaire par le plan dont nous parlons.