NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

POUDRA

Problème sur sept plans

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 161-164

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__161_1>

PROBLÈME SUR SEPT PLANS;

PAR M. POUDRA.

Lemme. Par une droite et six points faire passer un hyperboloïde.

Désignons la droite par L et les six points par les lettres a, b, c, d, e, f.

Par la droite L et les cinq points a, b, c, d, e faisons passer cinq plans. En les coupant par un plan quelconque, on obtiendra un faisceau de cinq droites.

Joignons le point f aux points a, b, c, d, nous aurons quatre droites qu'on peut considérer comme les arêtes d'un cône. Coupons ce cône par un plan, nous aurons quatre points de sa base. On fera passer par ces quatre points une section conique telle, qu'un point de cette courbe joint à ces quatre points donne un faisceau de quatre droites homographiques avec le faisceau des quatre premiers plans ci-dessus passant par la droite L et par a, b, c, d. Cette courbe sera la base du cône.

Formons de même un second cône ayant même sommet f, et faisons la même opération que ci-dessus, en prenant les points a, b, c, e.

Les deux cônes de même sommet f, ayant trois arêtes fa, fb, fc communes, se couperont en une seule et même arête qui sera telle, que les plans passant par cette droite et par les cinq points a, b, c, d, e formeront un faisceau homographique avec celui qui passe par L et les mêmes points; donc, d'après un théorème connu, les plans de ces deux faisceaux se couperont respectivement suivant un hyperboloïde passant par les six points a, b, c, d, e, f et par la droite L. Le problème est donc résolu.

Corollaire. Si, en conservant la droite L et les cinq points a, b, c, d, e, on fait varier le point f, on obtiendra pour chaque position un hyperboloïde différent et qui tous auront en commun les cinq points a, b, c, d, e et la droite L.

On peut en conclure que si deux hyperboloïdes ont cinq points communs, ils se coupent encore suivant une seule et même droite.

Problème. *On donne sept points sur une droite formant une division quelconque. On donne dans l'espace sept plans. On demande de déterminer une transversale qui soit coupée par les sept plans en sept points formant sur cette droite une division homographique à la première.*

Ce problème me semble difficile à attaquer par l'analyse. En voici une solution géométrique fondée sur les notions des fonctions anharmoniques.

Par une transformation polaire, on peut substituer à cette question la suivante :

On donne un faisceau de sept plans désignés par A, B, C, D, E, F, G passant par conséquent par une même droite L; on donne dans l'espace sept points désignés par a, b, c, d, e, f, g. On demande de faire passer par ces sept points un faisceau de sept plans homographiques au faisceau donné.

Considérons d'abord les six points a, b, c, d, e, f et cherchons le lieu géométrique d'une droite telle, que les six plans passant par cette droite et les six points forment un faisceau homographique à celui qui passe par la droite L et par les six plans A, B,..., F. Ce lieu sera évidemment un hyperboloïde passant par ces six points.

Pour déterminer cet hyperboloïde, prenons un des points a pour le sommet d'un cône passant par les quatre points b, c, d, e; coupons les quatre arêtes ab, ac, ad, ae par un plan quelconque, nous aurons quatre points par lesquels nous ferons passer une conique telle, qu'un point de cette courbe jointe à ces quatre points donne un faisceau de quatre droites homographiques avec celui des quatre plans B, C, D, E. On regardera cette section conique comme la base d'un cône de sommet a et passant par les points b, c, d, e.

Déterminons ensuite un deuxième cône de même sommet a et faisons la même opération, mais en prenant les points b, c, d, f.

Les deux cônes de même sommet a ayant trois arêtes communes ab, ac, ad, se couperont suivant une autre et unique arête qui sera telle, que les plans passant par les cinq points b, c, d, e, f et par cette droite formeront un faisceau homographique avec celui qui est formé par les cinq plans B, C, D, E, F.

Par cette droite, menons encore un sixième plan, et tel, que les six plans forment un faisceau homographique à celui des six plans A, B, C, D, E, F. Ce sixième plan sera le plan tangent à l'hyperboloïde en un point de cette droite.

Par un autre point *f* de ceux donnés, déterminons de même la droite par laquelle faisant passer six plans par les points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, ils forment un faisceau aussi homographique à celui formé par ceux A, B, C, D, E, F et, par conséquent, au faisceau formé ci-dessus. Or les deux faisceaux de plans étant homographiques, il en résultera que leurs plans respectifs se rencontreront deux à deux suivant les génératrices de l'hyperboloïde cherché. Pour avoir d'autres génératrices de cette surface, il suffira de faire passer par les axes de ces deux faisceaux une suite de couples de plans homographiques.

On peut construire de même un deuxième hyperboloïde passant par les six points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et *g* et tel, que les six plans passant par une quelconque de ses arêtes et par ces six points forment un faisceau homographique à celui des six plans A, B, C, D, E, G.

On aura alors deux hyperboloïdes ayant de commun les cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Ils se couperont suivant une seule et même génératrice qui sera l'axe du faisceau cherché (lemme) qui doit passer par les sept points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* et être homographique à celui des sept plans A, B, C, D, E, F, G.