NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRÜNNOW

Sur les quatre systèmes de coordonnées astronomiques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 165-171

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__165_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR LES QUATRE SYSTÈMES DE COORDONNÉES ASTRONOMIQUES.

Extrait de l'*Astronomie sphérique* de Brünnow (*).

1er SYSTÈME. — HAUTEUR ET AZIMUT.

1°. *Deux coordonnées sphériques rectangulaires.*

Par l'astre et le zénith du lieu d'observation, on fait passer un grand cercle nommé *cercle vertical* de l'astre; la portion de cet arc (moindre que 180 degrés) comprise entre l'astre et le zénith se nomme distance *zénithale*, et la portion entre l'astre et l'horizon est la *hauteur* de l'astre : ces deux distances font toujours ensemble 90 degrés. Par le zénith et l'axe du monde, on fait passer un grand cercle qui coupe l'horizon en deux points *nord* et *sud*. L'arc de l'horizon compris entre le point sud et le cercle vertical de l'astre est l'*azimut* de l'astre. Cet azimut se compte de 0 à 360 degrés dans le sens du mouvement diurne de la Terre, de gauche à droite en regardant le nord.

Observation. On a des instruments pour mesurer à la fois la hauteur et l'azimut, d'autres pour les hauteurs seulement; ce sont des quarts de cercles, des sextants ou des cercles entiers; les instruments avec lesquels on ne mesure que les azimuts se nomment *théodolites*.

(*) Actuellement professeur à l'université du Michigan en Amérique. La traduction de son ouvrage est terminée.

2°. *Trois coordonnées rectilignes rectangulaires.*

Le plan de l'horizon est celui des x, y; la partie *positive* de l'axe des x est dirigée vers l'origine des azimuts, et la partie *positive* de l'axe des y vers l'azimut de 90 degrés; la partie *positive* de l'axe des z vers le pôle nord. On a

$$x = \cos h \cos A, \quad y = \cos h \sin A, \quad z = \sin h,$$

où h est la hauteur de l'astre et A son azimut.

2ᵉ SYSTÈME. — ANGLE HORAIRE ET DÉCLINAISON.

1°. *Deux coordonnées sphériques.*

Un grand cercle passant par l'astre et l'axe du monde se nomme *cercle horaire;* le grand cercle qui passe par l'axe du monde et le zénith se nomme *méridien;* l'angle formé par ces deux plans est l'*angle horaire* de l'étoile: il se compte à partir du méridien de 0 à 360 degrés dans le sens du mouvement diurne de la Terre. La partie du cercle horaire comprise entre l'astre et l'équateur est la *déclinaison* de l'astre, et la partie entre l'astre et le pôle nord est la *distance polaire* de l'astre. La déclinaison positive dans l'hémisphère boréal est négative dans l'hémisphère austral. Ces deux données, angle horaire et déclinaison, déterminent la position de l'astre.

2°. *Trois coordonnées rectangulaires.*

L'équateur est le plan des x, y; la partie positive de l'axe des x est dirigée vers le point d'intersection de l'équateur et du méridien qui correspond à un angle horaire nul; la partie positive de l'axe des y est dirigée vers le point de l'équateur qui répond à un angle horaire de 90 degrés; l'axe des z est l'axe du monde dirigé vers le pôle nord, et l'on a

$$x' = \cos\delta \cos t, \quad y' = \cos\delta \sin t, \quad z' = \sin\delta,$$

où δ est la déclinaison et t l'angle horaire.

3e SYSTÈME. — DÉCLINAISONS ET ASCENSIONS DROITES.

1°. *Deux coordonnées sphériques.*

Dans le système précédent, la déclinaison est constante; mais la seconde coordonnée, l'angle horaire, varie à chaque instant. Pour rendre cette coordonnée constante, on a pris un point fixe dans l'équateur; c'est le point d'équinoxe vernal. La distance de ce point à celui où le cercle horaire de l'astre coupe l'équateur se nomme l'*ascension droite* de l'astre; elle se compte de 0 à 360 degrés d'occident en orient, dans le sens du mouvement diurne de la Terre. Dans ce système, les deux coordonnées, déclinaison et ascension droite, sont constantes.

Observation. L'équatorial, ou instrument parallactique, et la pendule servent à trouver les coordonnées du deuxième et du troisième système.

2°. *Trois coordonnées rectilignes rectangulaires.*

Le plan de l'équateur est encore celui des x, y; la partie positive de l'axe des x est dirigée vers le point d'équinoxe vernal où l'ascension droite est nulle, et la partie positive de l'axe des y vers le point où l'ascension droite est de 90 degrés; l'axe des z est l'axe du monde dirigé vers le pôle nord, et l'on a

$$x'' = \cos\delta \cos\alpha, \quad y'' = \cos\delta \sin\alpha, \quad z'' = \sin\delta,$$

où δ est la déclinaison et α l'ascension droite.

4e SYSTÈME. — LONGITUDE ET LATITUDE.

1°. *Deux coordonnées sphériques.*

Les grands cercles passant par les pôles de l'écliptique se nomment *cercles de latitudes*. L'arc d'un tel cercle passant par l'astre, compris entre l'astre et l'écliptique, est la latitude de l'astre; elle est positive lorsque l'étoile et le pôle nord sont dans le même hémisphère formé par l'écliptique et négative lorsque l'astre est dans le second hémisphère. C'est une première coordonnée. L'arc de l'écliptique compris entre le point d'équinoxe vernal et le cercle de latitude est la longitude de l'astre; c'est la seconde coordonnée et se compte de o à 360 degrés dans le sens du mouvement diurne de la Terre.

2°. *Trois coordonnées rectilignes rectangulaires.*

Le plan de l'écliptique est le plan des xy; la partie positive de l'axe des x est dirigée vers le point d'équinoxe vernal; la partie positive de l'axe des y vers le point qui a 90 degrés de longitude; la partie positive de l'axe des z perpendiculaire à l'écliptique dirigé vers l'hémisphère où est le pôle nord.

$$x''' = \cos\beta\cos\lambda, \quad y''' = \cos\beta\sin\lambda, \quad z''' = \sin\beta,$$

où β est la latitude et λ la longitude de l'étoile.

CONVERSION DES COORDONNÉES D'UN SYSTÈME DANS LES COORDONNÉES D'UN AUTRE SYSTÈME.

A. *Conversion du premier système dans le second.*

Considérons le triangle formé par le pôle P, le zénith Z et l'étoile E; on a

$$PZ = 90^\circ - \varphi,$$

où φ est la hauteur du pôle,

$$\mathrm{PE} = 90^\circ - \delta, \quad \mathrm{EZ} = 90^\circ - h,$$
$$\mathrm{P} = t, \qquad \mathrm{Z} = 180^\circ - \mathrm{A}.$$

E = angle à l'astre, *angle parallactique*. On a, d'après les formules connues,

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos \mathrm{A},$$
$$\sin\delta \cos t = \cos h \sin \mathrm{A},$$
$$\cos\delta \cos t = \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos \mathrm{A}.$$

Faisant

$$\sin h = m \cos \mathrm{M},$$
$$\cos h \cos \mathrm{A} = m \sin \mathrm{M},$$

les formules adaptées au calcul par logarithmes deviennent

$$\sin\delta = \mathrm{M} \sin (\varphi - \mathrm{M}),$$
$$\sin\delta \cos t = \cos h \sin \mathrm{A},$$
$$\cos\delta \cos t = m \cos (\varphi - \mathrm{M}).$$

A'. *Deuxième système dans le premier.*

Le même triangle donne

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$
$$\cos h \sin \mathrm{A} = \cos\delta \sin t,$$
$$\cos h \cos \mathrm{A} = - \cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t.$$

Faisons

$$\cos\delta \cos t = m \cos \mathrm{M},$$
$$\sin\delta = m \sin \mathrm{M},$$

on a

$$\sin h = m \cos (\varphi - \mathrm{M}),$$
$$\cos h \sin \mathrm{A} = \cos\delta \sin t,$$
$$\cos h \cos \mathrm{A} = m \sin (\varphi - \mathrm{M}).$$

B. *Conversion du troisième dans le quatrième système.*

Considérons le triangle formé par le pôle P′ de l'écliptique, le pôle P de l'équateur et l'astre E, on a

$$\begin{aligned} PP' &= \varepsilon = \text{obliquité de l'écliptique}, \\ PE &= 90^\circ - \delta, \\ P'E &= 90^\circ - \beta, \\ P &= 90^\circ + \alpha, \\ P' &= 90^\circ - \alpha, \\ E &= \text{angle à l'astre}; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha, \\ \cos\beta\sin\lambda &= \cos\delta\cos\alpha\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon, \\ \sin\beta &= -\cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon. \end{aligned}$$

Faisant

$$\begin{aligned} M\sin N &= \sin\delta, \\ M\cos N &= \cos\delta\sin\alpha, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha, \\ \cos\beta\sin\lambda &= M\cos(N-\varepsilon), \\ \sin\beta &= M\sin(N-\varepsilon). \end{aligned}$$

B′. *Conversion du quatrième dans le troisième système.*

Même triangle que ci-dessus.

$$\begin{aligned} \cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda, \\ \cos\delta\sin\alpha &= \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon, \\ \sin\delta &= \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon. \end{aligned}$$

Faisant

$$\operatorname{tang} N = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\lambda},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\alpha &= \frac{\cos(N+\varepsilon)}{\cos N}\operatorname{tang}\lambda, \\ \operatorname{tang}\delta &= \operatorname{tang}(N+\varepsilon)\sin\alpha. \end{aligned}$$

Observation. La conversion du premier système dans le quatrième et *vice versâ* n'est pas usitée.

Relations entre les diverses coordonnées rectangulaires (*voir* ci-dessus).

$$x = \cos A \cos h,$$
$$y = \sin A \cos h,$$
$$z = \sin h,$$
$$x' = z \sin\varphi + z \cos\varphi,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z \sin\varphi - x \cos\varphi,$$
$$x'' = x' \cos\Theta + y' \sin\Theta,$$
$$y'' = y' \cos\Theta - x' \sin\Theta,$$
$$z'' = z',$$

où

$$\Theta = \alpha + t = \text{temps sidéral}.$$

$$x''' = x'',$$
$$y''' = y'' \cos\varepsilon + z'' \sin\varepsilon,$$
$$z''' = - y'' \sin\varepsilon + z'' \cos\varepsilon,$$
$$x''' = \cos\beta \cos\lambda,$$
$$y''' = \cos\beta \sin\lambda,$$
$$z'' = \sin\beta.$$

Exemple (B) :

$\alpha = 6^\circ\, 33'\, 29'',30$, $\delta = -\, 16^\circ\, 22'\, 35'',45$, $\varepsilon = 22^\circ 27' 31'',72$.

On trouve

$$\log \cos\beta \sin\lambda = 8.0689241_n$$
$$\log \cos\delta \sin\alpha = \underline{9.0397224}$$
$$9.0292017_n$$

Exemple (A) :

$\varphi = 52^\circ\, 30'\, 16'',0$, $h = 16^\circ\, 11'\, 4'',0$, $A = 202^\circ\, 4'\, 15'',5$.

On trouve

$$\delta = + 49^\circ\, 43'\, 46'',0, \quad t = 223^\circ\, 56'\, 2'',22.$$