Sur les fractions continues algébriques, d'après Gauss

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 207-211

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__207_0>

SUR LES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES;

D'APRÈS GAUSS.

Met. nova. integr. Comm. Gotting. vol. II, 1814-15, pages 42.

---

1. Soit proposée la fraction continue

$$\varphi = \cfrac{v}{\varpi + \cfrac{v'}{\varpi' + \cfrac{v''}{\varpi'' + \cfrac{v'''}{\varpi''' + \ldots}}}}$$

Formons ces deux séries V, V', V'', V''', etc., W, W', W'', W'''; d'après ces relations

$$\begin{array}{ll}
V = 0, & W = 1, \\
V' = v, & W' = \varpi W, \\
V'' = \varpi' V' + v' V, & W'' = \varpi' W' + v' W, \\
V''' = \varpi'' V'' + v'' V', & W''' = \varpi'' W'' + v'' W', \\
V^{\text{IV}} = \varpi''' V''' + v''' V'', & W^{\text{IV}} = \varpi''' W''' + v''' W'', \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

on aura

$$\frac{V}{W} = 0,$$

$$\frac{V'}{W'} = \frac{v}{\varpi},$$

$$\frac{V''}{W''} = \cfrac{v}{\varpi + \cfrac{v'}{\varpi'}},$$

$$\frac{V'''}{W'''} = \cfrac{v}{\varpi + \cfrac{v'}{\varpi' + \cfrac{v''}{\varpi''}}},$$

et ainsi de suite.

On en déduit

$$\begin{aligned}
VW' - V'W &= -\, v, \\
V'W'' - V''W' &= +\, vv', \\
V''W''' - V'''W'' &= -\, vv'v'', \\
V'''W^{\text{IV}} - V^{\text{IV}}W''' &= +\, vv'v''\omega''', \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ainsi dans la série

$$\frac{v}{WW'} - \frac{vv'}{W'W''} + \frac{vv'v''}{W''W'''} - \frac{vv'v''v'''}{W'''W^{\text{IV}}} + \ldots,$$

Le premier terme est $\frac{V'}{W'}$;

La somme des deux premiers termes égale $\frac{V'}{W''}$;

La somme des trois premiers termes égale $\frac{V'''}{W'''}$;

La somme des quatre premiers termes égale $\frac{V^{\text{IV}}}{W^{\text{IV}}}$;

Et ainsi de suite.

Cette série, soit qu'elle se termine ou qu'elle se prolonge à l'infini, exprime la valeur de φ et aussi la différence de φ et des fractions approchées

$$\frac{V'}{W'},\quad \frac{V''}{W''},\quad \frac{V'''}{W'''},\ldots.$$

Il est facile de voir qu'on a aussi les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi W'' - V'' &= \omega' (\varphi W' - V') + v' (\varphi W - V), \\
\varphi W''' - V''' &= \omega'' (\varphi W'' - V'') + v'' (\varphi W' - V'), \\
\varphi W^{\text{IV}} - V^{\text{IV}} &= \omega''' (\varphi W''' - V''') + v''' (\varphi W'' - V''), \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Application.

Soit

$$\varphi = \frac{1}{2}\log\frac{1+u^{-1}}{1-u^{-1}} = u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \ldots$$

Réduite en fraction continue, on a

$$\varphi = \cfrac{1}{u - \cfrac{\frac{1}{3}}{u - \cfrac{\frac{2.2}{3.5}}{u - \cfrac{\frac{3.3}{5.7}}{u - \cfrac{\frac{4.4}{7.9}}{u - \ldots}}}}}$$

ainsi

$$v = 1,\quad v' = \frac{1}{3},\quad v'' = -\frac{4}{15},\quad v''' = \frac{9}{35},\quad v^{\text{IV}} = -\frac{16}{63},\ldots,$$

$$w = w' = w'' = w''' = w^{\text{IV}} = \ldots = u;$$

$$V = 0,$$

$$V' = 1,$$

$$V'' = u,$$

$$V''' = u^2 - \frac{4}{15},$$

$$V^{\text{IV}} = u^3 - \frac{11}{21}u,$$

$$V^{\text{VI}} = u^4 - \frac{7}{9}u^2 + \frac{64}{945},$$

$$V^{\text{V}} = u^5 - \frac{34}{33}u^3 + \frac{1}{5}u,$$

$$V^{\text{VII}} = u^6 - \frac{50}{39}u^4 + \frac{283}{715}u^2 - \frac{256}{15015},$$

....

$$W = 1,$$
$$W' = u,$$
$$W'' = u^2 - \frac{1}{3},$$
$$W''' = u^3 - \frac{3}{5}u,$$
$$W^{\text{IV}} = u^4 - \frac{6}{7}u^2 + \frac{3}{35},$$
$$W^{\text{V}} = u^5 - \frac{10}{9}u^3 + \frac{5}{21}u,$$
$$W^{\text{VI}} = u^6 - \frac{15}{11}u^4 + \frac{5}{11}u^2 - \frac{5}{231},$$
$$W^{\text{VII}} = u^7 - \frac{21}{13}u^5 + \frac{105}{143}u^3 - \frac{35}{429}u,$$
$$\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots$$

Il est facile de voir que les V et les W sont tous des fonctions entières de u; que $V^{(m)}$ est de degré $m-1$, et que les puissances $m-2$, $m-4$, $m-6$ manquent; que $W^{(m)}$ est de degré m, et les puissances $m-1$, $m-3$, $m-5$, etc., manquent; et l'on a

$$\varphi = \frac{1}{WW'} + \frac{1}{3\,W'W''} + \frac{2.2}{3.3.5\,W''W'''} + \frac{2.2.3.3}{3.3.5.5\;7\,W'''W^{\text{IV}}} + \frac{2.2.3.3.4.4}{3.3.5.5.7.7\;9\,W^{\text{IV}}W^{\text{V}}} + \ldots,$$

et aussi généralement

$$\varphi - \frac{V^{(m)}}{W^{(m)}} = \frac{2.2.3.3\ldots m.m}{3.3.5.5\ldots(2m-1)(2m+1)\,W^{(m)}W^{(m+1)}} + \frac{2.2.3.3\ldots(m+1)(m+1)}{3.3.5.5\ldots(2m+1)(2m+3)\,W^{(m+1)}W^{(m+2)}} + \text{etc.}$$

Si l'on développe $\frac{V^{(m)}}{W^{(m)}}$ en une série descendante, son premier terme sera

$$\frac{2.2.3.3\ldots m.m.u^{-(2m+1)}}{3.3.5.5\ldots(2m-1)(2m+1)};$$

car le premier terme de $W^{(m)}$ est u^m et celui de $W^{(m+1)}$ est $u^{(m+1)}$.

Ainsi $\varphi W^{(m)}$ est égal à une fonction entière $V^{(m)}$, plus à une série infinie dont le premier terme est égal à

$$\frac{2.2.3.3\ldots m.m.u^{-(m+1)}}{3.3.5.5\ldots(2m-1)(2m+1)}.$$

Cette propriété de la fonction $W^{(m)}$ est importante dans la recherche des intégrales par approximation.