Peaucellier

Gnomonique, construction d'un cadran solaire à style quelconque, en s'assujettissant à la condition de n'employer que des droites pour les lignes horaires et les lignes de déclinaison

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 211-216

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__211_1>

GNOMONIQUE.

Construction d'un cadran solaire à style quelconque, en s'assujettissant à la condition de n'employer que des droites pour les lignes horaires et les lignes de déclinaison ;

Par M. PEAUCELLIER

A, B, C, a, b, c représentant les angles et les côtés opposés d'un triangle sphérique quelconque, les analogies de Neper conduisent aisément à la formule

$$\cot A \sin C = \sin b \cot a - \cos b \cos C.$$

Appliquons cette formule au triangle formé par les arcs de grands cercles passant par le pôle, le zénith et la position actuelle du Soleil. Soient D et Az la déclinaison et l'azimut du Soleil, P l'angle horaire et enfin L la latitude du lieu. On pourra poser

$$A = 180^\circ - Az,$$
$$C = P,$$
$$a = 90^\circ - D,$$
$$b = 90^\circ - L,$$

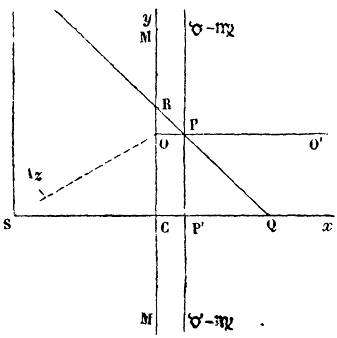
ce qui donne l'expression

$$-\cot Az \sin P = \cos L \,\text{tang}\, D - \sin L \cos P,$$

ou bien

$$\cot Az = -\frac{\cos L}{\sin P}\,\text{tang}\, D + \frac{\sin L}{\text{tang}\, P}.$$

Cela posé, nous allons résoudre le problème pour le cas particulier où le style est vertical et le plan du cadran parallèle au méridien. Il sera facile ensuite de généraliser la solution.



Soient S la projection du style, MM la trace sur l'horizon du plan du cadran, que nous supposons rabattu autour de cette droite. L'ombre portée par le style sur le plan du cadran sera une droite OO′ perpendiculaire à MM. Le point C étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point S sur la même droite, il est clair que l'on pourra poser $CO = \cot Az$, pourvu que l'on conserve dans la suite la distance SC pour unité linéaire. Cela étant, si l'on prend sur OO′ une longueur OP = tang D, la formule précédente devient

$$CO = -\frac{\cos L}{\sin P}\,OP + \frac{\sin L}{\operatorname{tang} P}$$

ou

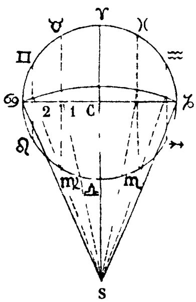
$$y = -\frac{\cos L}{\sin P}\,x + \frac{\sin L}{\operatorname{tang} P},$$

en considérant OP et CO comme les coordonnées du point P. Il en résulte que le lieu des points P obtenus à la même heure pendant le cours d'une année est une droite QR.

Le point P peut être considéré comme résultant de l'intersection de trois droites : l'ombre OO′ du style, la droite PP′ parallèle à MM et distante de cette droite d'une longueur égale à tang D, enfin la ligne horaire QR. D'où il résulte qu'en traçant une série de droites telles que PP′ et correspondant aux diverses valeurs de tang D, de même que les lignes horaires QR correspondant aux différentes heures de la journée, on obtiendra un réseau qui permettra de lire l'heure à un instant quelconque. Il suffira de voir sur quelle ligne horaire se trouve le point P, intersection de la ligne de déclinaison actuelle PP′ avec l'ombre OO′ du style.

Tracé des lignes de déclinaison. On a vu qu'elles sont parallèles à la droite MM et a une distance égale à la tangente de la déclinaison variable du Soleil. L'*Annuaire* fournit ces valeurs pour chaque jour de l'année; mais on peut se contenter des déclinaisons relatives à l'entrée du Soleil dans les différents signes du zodiaque. Voici comment on peut les construire géométriquement.

De part et d'autre de la droite SC, prise pour unité linéaire, on fait au point S un angle égal à la déclinaison maximum 23° 28′. On élève en C une perpendiculaire sur SC et on la limite aux droites précédentes. Sur ♋♑



comme diamètre, on décrit un cercle que l'on divise en douze parties égales correspondant aux douze signes. On joint les points de division deux à deux et parallèlement à SC. Ces droites rencontrent l'arc de cercle décrit de S comme centre avec S♋ pour rayon en différents points qu'il suffit de joindre à S pour avoir les déclinaisons correspondantes. Les tangentes seront donc C1, C2, etc., qu'il faudra reporter, dans la figure précédente, sur CQ à partir de C à droite pour les valeurs positives de tang D, à gauche pour les valeurs négatives.

Tracé des lignes horaires. On a vu que leur équation était

$$y = -\frac{\cos L}{\sin P}x + \frac{\sin L}{\operatorname{tang} P}.$$

Pour avoir les points où elles coupent la ligne MM, il suffit de faire $x = 0$, ce qui donne l'expression $\frac{\sin L}{\operatorname{tang} P}$ ou $\sin L \cot P$ que l'on construit immédiatement, en prenant pour P les diverses valeurs 15, 30, 45 degrés, etc., si l'on veut les lignes horaires, espacées d'heure en heure. Pour avoir les points où elles coupent la droite Cx, on fera $y = 0$, ce qui donne l'expression $\tang L \cos P$, dont la construction est tout aussi facile.

Nous n'insisterons pas davantage sur le tracé de ces droites, non plus que sur quelques-unes de leurs propriétés que l'on trouve aisément. Remarquons toutefois que l'enveloppe des lignes horaires est une hyperbole dont l'équation est

$$y^2 - x^2 \cos^2 L + \sin^2 L = 0.$$

Cas général où le style et le plan du cadran sont quelconques.

Quelle que soit la direction du style, il existe toujours un point de la Terre pour lequel elle est verticale. Concevons à côté du style un plan parallèle au méridien de ce point et portant le tracé dont on vient d'exposer les détails ; ce cadran fictif donnerait l'heure du lieu pour lequel la direction du style est verticale. Il donnerait l'heure même du lieu où il se trouve, si, au lieu de tracer les lignes horaires correspondant à 15, 30, 45 degrés, etc., on trace celles qui correspondent à $15^\circ + \lambda$, $30^\circ + \lambda$, $45^\circ + \lambda$, etc., λ étant la différence de longitude des deux lieux. Ces lignes seraient marquées I, II, III, etc., et donneraient les heures entières.

Enfin, ce plan fictif peut être remplacé par un plan tout à fait arbitraire en prenant pour réseau de droites sur ce plan la perspective du réseau précédent, l'œil étant supposé en un point quelconque du style. Cette propriété se démontre aisément.

Les lignes de déclinaison étant parallèles, dans le premier cas que nous avons considéré, leur perspective sur un plan devient un faisceau de droites passant par un point déterminé. Les lignes horaires deviennent les tangentes à une courbe du second degré qui, dans des cas particuliers, devient un cercle.

Le point d'où on fait la projection conique pouvant être choisi arbitrairement sur le style, on voit qu'il existe une infinité de solutions du problème pour un plan et un style donnés.

Si l'on voulait n'employer que des cercles, il suffirait de prendre les réciproques des droites, le pôle étant à l'intersection du plan et du style. Tous les cercles passeraient par ce point.

On voit que la construction de ce cadran à style quelconque conduit à des opérations de géométrie descriptive qui, au premier abord, semblent assez compliquées. Cependant une étude un peu plus approfondie du problème fait ressortir de nombreuses simplifications; on peut même, à la rigueur, se dispenser complétement du plan auxiliaire dont on a parlé plus haut. La première application mettrait ces faits en évidence.

Enfin, il resterait à considérer bien des cas particuliers présentant tous plus ou moins d'intérêt; entre autres on peut citer le gnomon ordinaire, le comparer avec le cadran horizontal dit astrolabe, etc. Le lecteur remplira sans difficulté les lacunes de ce petit travail.

Note du Rédacteur. Notre expédition en Tauride a fait voir combien il est nécessaire en campagne de savoir tracer des cadrans solaires. La méthode aussi simple qu'ingénieuse qu'on vient de lire est bien propre à propager ce genre de connaissances et se recommande comme telle aux professeurs de cosmographie et de géométrie descriptive. Nous rappelons à cette occasion l'ouvrage si complet de M. Born, mort général d'artillerie le 21 mars 1854. (Voir *Nouvelles Annales*, t. V, p. 483; 1846.)