NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DEVAUX

Solution de la question 323

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 226-227

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__226_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 323

(voir page 154),

PAR M. DEVAUX,
Élève du lycée Charlemagne (classe de M. Rouche).

Soient C et c les centres, R et r les rayons des deux cercles ; T et t les points où la tangente extérieure Nn rencontre les deux côtés de l'angle droit TOt formé par les deux tangentes intérieures ; N et n sont les points de contact. L'aire du triangle TOt a pour mesure le produit de l'hypoténuse Tt par la moitié de la perpendiculaire OH abaissée du sommet de l'angle droit. Or le trapèze rectangle NCcn donne pour cette hauteur

$$\mathrm{OH} = \frac{\mathrm{O}c.\mathrm{CN} + \mathrm{OC}.cn}{\mathrm{OC} + \mathrm{O}c} = \frac{r}{\mathrm{R}+r}\mathrm{R} + \frac{r}{\mathrm{R}+r}r = \frac{2\mathrm{R}r}{\mathrm{R}+r}.$$

D'ailleurs, en ajoutant les relations

$$\mathrm{T}t + tn = \mathrm{R} + r + \mathrm{TN},\quad \mathrm{T}t + \mathrm{TN} = \mathrm{R} + r + tn \text{ (*)}$$

on obtient, pour la base,

$$\mathrm{T}t = \mathrm{R} + r.$$

L'aire du triangle $\frac{1}{2}\mathrm{OH}.\mathrm{T}t$ est donc équivalente au rectangle Rr des rayons.

Dans le cas où les tangentes intérieures, au lieu d'être rectangulaires, se coupent dans l'angle 2α, la même méthode donne

$$\mathrm{R}r\cot\alpha$$

(*) Soit I le point où la tangente OT touche le cercle c ; on a

$$\mathrm{T}n = \mathrm{TI} = \mathrm{TN} + \mathrm{R} + r;$$

les tangentes OT, Ot sont inclinées de 45 degrés sur la droite des centres.

pour la mesure de l'aire du triangle correspondant $\mathrm{TO}t$.

La surface du triangle formé par une tangente inté-rieure et deux tangentes extérieures est donnée par une formule semblable. Soient T' le point symétrique de T par rapport à la ligne des centres, O' le point de concours et $2\alpha'$ l'angle des deux tangentes extérieures. La surface du triangle $\mathrm{T}'t\mathrm{O}'$ est égale au produit du demi-périmètre par le rayon r du cercle inscrit. Or, en ajoutant les relations

$$\mathrm{O}'t = \mathrm{O'N} - t\mathrm{N}, \quad t\mathrm{T}' = t\mathrm{N} + \mathrm{TN}, \quad \mathrm{T'O'} = \mathrm{O'N} - \mathrm{TN},$$

on trouve pour le demi-périmètre

$$\mathrm{O'N} \quad \text{ou} \quad \mathrm{R}\cot\alpha'.$$

L'aire cherchée a donc pour expression

$$\mathrm{R}r\cot\alpha',$$

qui se réduit à $\mathrm{R}r$ lorsque les tangentes extérieures se coupent à angle droit.

L'aire du quadrilatère formé par les quatre tangentes est donc

$$\mathrm{R}r(\cot\alpha' - \cot\alpha) = \mathrm{R}r\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin\alpha\sin\alpha'}.$$

Lorsque les deux cercles se touchent extérieurement il faut faire $2\alpha = 180^\circ$.

Note du Rédacteur. M. Richard-P. Oxamendi, de Cuba, démontre que l'aire du triangle $\mathrm{TO}t$ est égale au rectangle des perpendiculaires abaissées de T et de t sur la ligne des centres, et ensuite que ce rectangle est égal à celui des rayons par des considérations polaires.