

E. CATALAN

**Sur la somme des puissances semblables
des nombres naturels**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 230-235

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__230_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES
DES NOMBRES NATURELS;**

PAR E. CATALAN

La plupart des traités d'algèbre donnent la relation générale

$$(n + 1)[(n + 1)^p - 1] \\ = \frac{p + 1}{1} S_p + \frac{p + 1}{1} \frac{p}{2} S_{p-1} + \dots + \frac{p + 1}{1} S_1,$$

dans laquelle S_p représente la somme des puissances p des n premiers nombres entiers. Cette relation permet de calculer assez rapidement les valeurs de S_1 , S_2 , S_3 , S_4 ;

mais elle devient presque illusoire dès que l'indice p surpasse 4. Il y a dix ans, M. Puiseux, probablement frappé de cet inconvénient, donna, dans le *Journal* de M. Liouville, la valeur de S_p en fonction explicite de n et de p . Malheureusement, la méthode employée par ce savant géomètre est assez compliquée (*); en outre, les valeurs qu'il trouve pour les coefficients de S_p , très-satisfaisantes en théorie, le seraient fort peu s'il s'agissait de passer aux applications numériques (**).

La méthode suivante, dont le germe se trouve dans le grand ouvrage de Lacroix, sera peut-être, à cause de sa simplicité, capable d'intéresser les élèves.

I. On a identiquement

$$n^2 = n(n-1) + n.$$

En multipliant les deux membres par

$$n = (n-2) + 2 = (n-1) + 1,$$

on trouve

$$n^3 = n(n-1)(n-2 + 2 \mid n(n-1) + n, \\ + 1 \mid$$

ou

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$

Multipliant les deux membres de cette nouvelle égalité

(*) Cette observation, qui n'est pas une critique, s'applique également à un Mémoire de M. Pépin inséré dans les *Nouvelles Annales* (janvier 1856). Du reste, l'auteur, dont je n'ai connu le travail qu'après avoir terminé le mien, dit expressément, en parlant de la formule trouvée par M. Puiseux : « L'expression générale de la fonction $\varpi_{m,\alpha}$ est fort mal appropriée au calcul. »

(**) Par exemple, le coefficient 350 serait donné par ce calcul :

$$\frac{4^6 - 3 \cdot 3^6 + 3 \cdot 2^6 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4096 - 2187 + 192 - 1}{6} = \frac{2100}{6} = 350.$$

III. Ainsi que l'a fait remarquer Lacroix (*), le calcul des coefficients B_p, C_p, \dots, L_p est fort simple. En effet, si l'on suppose successivement

$$p = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

on trouve, par les formules (B),

p	A_p	B_p	C_p	D_p	E_p	F_p	G_p	H_p	K_p	L_p
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	6	7	1						
5	1	10	25	15	1					
6	1	15	65	90	31	1				
7	1	21	140	350	301	63	1			
8	1	28	266	1050	1701	966	127	1		
9	1	36	462	2646	6951	7770	3025	255	1	
10	1	45	750	19980	22827	42525	34105	9330	511	1

Il résulte, de la formation de ce tableau, que le *l^{ième} terme d'une colonne verticale quelconque est égal au terme écrit au-dessus augmenté de 1 fois le terme placé à la gauche de celui-ci (**)*. Par exemple

$$1701 = 301 + 4 \cdot 350.$$

IV. Si l'on écrit ainsi les nombres contenus dans le

(*) Et aussi M. Pépin.

(**) Pour plus de régularité, on a représenté par A_p le coefficient de $A_{n,p}$ coefficient égal à l'unité. Le Mémoire de M. Pépin contient également le tableau ci-dessus.

tableau précédent :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	7	15	31	63	127	255	511	
1	6	25	90	301	966	3025	9330		
1	10	65	350	1701	7770	34105			
1	15	140	1050	6951	42525				
1	21	266	2646	22827					
1	28	462	19980						
1	36	750							
1	45								
1									

on voit que les termes de la première ligne horizontale sont tous égaux à l'unité, et que ceux de la deuxième ligne sont égaux aux puissances successives de 2, diminuées de l'unité. En outre, *un terme quelconque* $N_{r,l}$ *occupant le rang* r *dans la* $l^{\text{ème}}$ *ligne horizontale, est égal à* l *fois le terme écrit à sa gauche, augmenté du terme écrit au-dessus.* Il n'est pas bien difficile de conclure de là :

$$(C) N_{r,l} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (l-1)} \left[\begin{array}{l} l^{r+l-2} - \frac{l-1}{1} (l-1)^{r+l-2} \\ + \frac{l-1}{1} \frac{l-2}{1} (l-2)^{r+l-2} - \dots \pm 1 \end{array} \right]$$

Cette formule générale, beaucoup moins commode que la règle précédente, a été trouvée par M. Puiseux.

V. Revenant à l'équation (A), nous aurons, en chan-

