NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FÉLIX LUCAS

Solution de la question 315

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 259-260

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__259_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 315

(voir page 239);

PAR M. FÉLIX LUCAS,
Élève de l'École Polytechnique.

Soit un système de n forces appliquées au point A et représentées en grandeur et en direction par les longueurs $AM_1, AM_2, \ldots, AM_n$, et soit AN la résultante.

E étant un point quelconque de l'espace, on forme l'expression

$$\overline{M_1E}^2 + \overline{M_2E}^2 + \ldots + \overline{M_nE}^2 - \overline{AE}^2.$$

Trouver la position du point E qui rend cette expression minima.

Je prends trois axes rectangulaires passant par A; j'appelle

$$\alpha_p, \ \beta_p, \ \gamma_p$$

les coordonnées du point M_p,

$$a, \ b, \ c$$

celles du point N.

On a alors

$$a = \sum \alpha_p, \quad b = \sum \beta_p, \quad c = \sum \gamma_p.$$

Si x, y, z désignent les coordonnées du point E, l'expression proposée est

$$\sum [(x-\alpha_p)^2 + (y-\beta_p)^2 + (z-\gamma_p)^2] - (x^2+y^2+z^2),$$

ou bien

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&(n-1)(x^2+y^2+z^2)-2(ax+by+cz)\\&\qquad\qquad\qquad+\sum(\alpha_p^2+\beta_p^2+\gamma_p^2).\end{aligned}\right.$$

Si je fais mouvoir le point E dans l'espace de manière que cette expression conserve une valeur constante k, ce point décrira une sphère (réelle ou imaginaire) dont le centre, qui ne dépend pas de la constante k, a pour coordonnées $\frac{a}{n-1}$, $\frac{b}{n-1}$, $\frac{c}{n-1}$.

On reconnaît aisément que la plus petite valeur que puisse prendre la fonction (1) pour des positions réelles de E est la valeur de k qui réduit à un point la sphère en question. Mais alors la position de E est complétement déterminée. C'est le centre fixe dont nous avons parlé.

Le point cherché n'est donc pas le point N (*), mais il s'obtient en prenant sur AN, à partir de A, la $(n-1)^{\text{ième}}$ partie de cette droite.

Note du Rédacteur. Une solution anonyme, fondée sur des raisonnements analogues à ceux de la solution précédente, nous a été adressée de Luxembourg, et une autre par M. Émile Fron, élève du collége Rollin (classe de M. Suchet).