

PEPIN

Sommation des deux suites

$$\sum_{n=1}^{n=n} (a + n - 1)^\alpha h^{n-1}, \sum_{n=1}^{n=n} [a + n - 1]^\alpha h^{n-1}$$

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 27-40

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__27_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION.

314. Construire la courbe à équation polaire

$$\rho^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}$$

et en donner *ad libitum* l'aire.

SOMMATION DES DEUX SUITES

$$\sum_{n=1}^{n=n} (a + n - 1)^\alpha h^{n-1}, \quad \sum_{n=1}^{n=n} [a + n - 1]^\alpha h^{n-1};$$

PAR LE P. PEPIN, S. J.

Le P. Riccati, dans son Mémoire *De seriabus summam algebraicam vel exponentialem recipientibus*, donne la somme de la série

$$1^\alpha k^1 + 2^\alpha k^2 + \dots + (n - 1)^\alpha k^{n-1} (*).$$

Je me propose d'exprimer aussi par un nombre limité de termes algébriques ou exponentiels la somme de la série plus générale

$$\sum_{n=1}^{n=n} (a + n - 1)^\alpha h^{n-1}.$$

(*) C'est le P. Lecoq qui m'a fait connaître cette série et qui m'a engagé à entreprendre l'étude dont je donne ici les principaux résultats.

d'où l'on pourra déduire la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique, ainsi que la somme d'une série analogue

$$\sum_{n=1}^{n=n} [a+n-1]^{\alpha} h^{n-1},$$

en désignant avec Vandermonde par $[a+n-1]^{\alpha}$ la factorielle

$$(a+n-1)(a+n-2)\dots(a+n-\alpha)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ et } n \text{ sont entiers et positifs;} \\ a \text{ et } h \text{ sont quelconques.} \end{array} \right.$$

1. Considérons la suite

$$X_{\alpha} = \sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^{\alpha} h^{a+n-1}.$$

En différentiant, nous trouverons

$$X_{\alpha+1} = \sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^{\alpha+1} h^{a+n-1} = k D_k \cdot X_{\alpha}.$$

Si donc nous indiquons par le symbole $(k D_k)^p$, que l'on doit répéter p fois, une opération qui consiste à prendre la dérivée par rapport à k et à multiplier le résultat par k , nous obtiendrons successivement

$$X_{\alpha} = (k D_k) \cdot X_{\alpha-1} = (k D_k)^2 \cdot X_{\alpha-2} = \dots = (k D_k)^{\alpha} \cdot X_0.$$

Et comme

$$X_0 = h^a + h^{a+1} + \dots + h^{a+n-1} = \frac{h^{a+n} - h^a}{k - 1},$$

on aura

$$X_\alpha = \sum_{n=1}^{n=\infty} (a+n-1)^\alpha k^{a+n-1} = (k D_k)^\alpha \cdot \frac{k^{a+n} - k^a}{k-1}.$$

Posons enfin

$$k = h + \tau, .$$

h désignant une constante et τ une variable infiniment petite; nous aurons pour la série proposée

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{n=\infty} (a+n-1)^\alpha h^{n-1} \\ &= h^{-a} \times \text{valeur de } [(h+\tau) D_\tau]^\alpha \frac{(h+\tau)^{a+n} - (h+\tau)^a}{h+\tau-1}, \end{aligned}$$

pour $\tau = 0$.

2. Supposons qu'en développant la fonction

$$\frac{(h+\tau)^{a+n} - (h+\tau)^a}{h-1+\tau}$$

suitant les puissances ascendantes de τ , on ait obtenu

$$\frac{(h+\tau)^{a+n} - (h+\tau)^a}{(h-1)+\tau}$$

$$= A_0 + A_1 \tau + A_2 \tau^2 + A_3 \tau^3 + \dots + A_m \tau^m + \dots$$

Désignons par $h^m \cdot \omega_{m,\alpha}$ la valeur que prend l'expression

$$\frac{[(h+\tau) D_\tau]^\alpha \cdot \tau^m}{1.2.3\dots m}$$

quand, après avoir effectué les opérations indiquées, on

pose $\tau = 0$. On a évidemment

$$\varpi_{m, \alpha} = 0$$

si m est plus grand que α ; l'équation obtenue précédemment deviendra donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} n = n \\ \sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^\alpha h^{n-1} \\ = h^{-1} \left\{ \begin{array}{l} A_1 h \varpi_{1, \alpha} + A_2 h^2 \cdot [2]^2 \cdot \varpi_{2, \alpha} + \dots \\ + A_\alpha \cdot h^\alpha [\alpha]^\alpha \cdot \varpi_{\alpha, \alpha} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

3. Calcul des coefficients $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\alpha$.

Supposons d'abord que h ait une valeur différente de l'unité, nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{(h+\tau)^{a+n} - (h+\tau)^a}{(h-1) + \tau} &= \frac{h^a}{h-1} \left\{ c_{0,0} + c_{1,1} \tau + \dots + c_{m,m} \tau^m + \dots \right\} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{\tau}{1-h} + \frac{\tau}{(1-h)^2} + \dots + \frac{\tau^m}{(1-h)^m} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

en posant, pour abrégier,

$$c_{\lambda, m} = \frac{[a+n]^\lambda \cdot h^n - [a]^\lambda}{[m]^\lambda} \cdot h^{-m}.$$

Le coefficient de τ^μ sera donc dans ce développement

$$(2) \quad \Lambda_\mu = \frac{h^a}{h-1} \cdot \sum_{m=0}^{m=\mu} \frac{[a+n]^m h^m - [a]^m}{[m]^\mu \cdot h^m (1-h)^{\mu-m}}.$$

Si $h = 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{(1-\tau)^{a+n} - (1+\tau)^a}{\tau} &= \frac{[a+n]^1 - [a]^1}{1} \\ + \frac{[a+n]^2 - [a]^2}{[2]^2} \cdot \tau + \dots + \frac{[a+n]^{\mu+1} - [a]^{\mu+1}}{[\mu+1]^{\mu+1}} \tau^\mu + \dots; \end{aligned}$$

le coefficient de τ^μ est donc dans ce cas

$$(3) \quad A_\mu = \frac{[a+n]^{\mu+1} - [a]^{\mu+1}}{[\mu]^\mu \cdot [\mu+1]}.$$

4. Calcul de la fonction $\varpi_{m,\alpha}$ définie par l'équation

$$[m]^m \cdot h^m \varpi_{m,\alpha} = \text{valeur de } [(h+\tau) D_\tau]^\alpha \cdot \tau^m, \text{ pour } \tau = 0.$$

En effectuant une différentiation, on trouve

$$\begin{aligned} & [m]^m h^m \cdot \varpi_{m,\alpha} \\ = & \left\{ mh \cdot [(h+\tau) D_\tau]^{\alpha-1} \cdot \tau^{m-1} + m [(h+\tau) D_\tau]^{\alpha-1} \cdot \tau^m \right\}_{\tau=0} \\ = & mh \cdot [m-1]^{m-1} \cdot h^{m-1} \cdot \varpi_{m-1,\alpha-1} + m [m]^m h^m \cdot \varpi_{m,\alpha-1}. \end{aligned}$$

On a donc, en divisant par $[m]^m h^m$,

$$(A) \quad \varpi_{m,\alpha} = \varpi_{m-1,\alpha-1} + m \varpi_{m,\alpha-1}.$$

On reconnaît aisément que

$$[(h+\tau) D_\tau]^\alpha \cdot \tau = h + \tau;$$

d'où l'on conclut

$$\varpi_{1,\alpha} = 1, \quad \alpha > 0.$$

Cette condition jointe à l'équation (A) définit complètement la fonction $\varpi_{m,\alpha}$ et permet d'en calculer les valeurs successives. Pour trouver son expression générale en fonction des nombres α et m , nous emploierons la méthode des fonctions génératrices de Laplace.

Multiplions par x^α les deux membres de l'équation (A) et faisons la somme des résultats obtenus, en donnant

à α les valeurs successives 1, 2, 3, ..., n , nous trouvons

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} (\varpi_{m,\alpha} x^\alpha) &= mx \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} (\varpi_{m,\alpha-1} x^{\alpha-1}) \\ &+ x \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} (\varpi_{m-1,\alpha-1} x^{\alpha-1}); \end{aligned}$$

ou bien, en posant

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} (\varpi_{m,\alpha} x^\alpha) = U_m,$$

$$\begin{aligned} U_m &= mx \cdot U_m + x \cdot U_{m-1} + x [m \varpi_{m,1} + \varpi_{m-1,0}] \\ &\quad - x^{n+1} [m \varpi_{m,n} + \varpi_{m-1,n}] \\ &= mx \cdot U_m + x U_{m-1} - x^{n+1} \varpi_{m,n+1} + x \varpi_{m,1}. \end{aligned}$$

Si l'on convient de ne donner à m que des valeurs supérieures à l'unité, on aura

$$\varpi_{m,1} = 0.$$

On déduira donc de l'équation précédente,

$$U_m = \frac{x \cdot U_{m-1}}{1 - mx} - \frac{x^{n+1} \varpi_{m,n+1}}{1 - mx}.$$

On aura ainsi successivement

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{x \cdot U_1}{1 - 2x} - \frac{x^{n+1} \varpi_{m,n+1}}{1 - 2x}, \\ U_3 &= \frac{x^2 \cdot U_1 - x^{n+1} \varpi_{m,n+1} F(x)}{(1 - 2x)(1 - 3x)}, \\ U_4 &= \frac{x^3 \cdot U_1 - x^{n+1} \varpi_{m,n+1} F_1(x)}{(1 - 2x)(1 - 3x)(1 - 4x)}, \\ &\vdots \\ U_m &= \frac{x^{m-1} \cdot U_1 - x^{n+1} \varpi_{m,n+1} f(x)}{(1 - 2x)(1 - 3x) \dots (1 - mx)}; \end{aligned}$$

$F(x), F_1(x), \dots, f(x)$ désignant des fonctions entières de la variable x . D'ailleurs la condition $\varpi_{1,\alpha} = 1$ nous donne

$$U_1 = x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x}{1-x} - \frac{x^n}{1-x};$$

on aura donc définitivement

$$U_m = \frac{x^m - x^{n+1} \cdot F(x)}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\dots(1-mx)},$$

$F(x)$ étant une fonction entière de x . Cette équation étant identique par rapport à x , le coefficient $\varpi_{m,\alpha}$ de x^α dans U_m doit être égal au coefficient de x^α dans le second membre. Or si nous supposons $n > \alpha$, ce coefficient ne dépend que de la fraction

$$\begin{aligned} & \frac{x^m}{(1-x)(1-2x)\dots(1-mx)} \\ &= \frac{c_1}{1-x} + \frac{c_2}{1-2x} + \dots + \frac{c_\rho}{1-\rho x} + \dots + \frac{c_m}{1-mx}. \end{aligned}$$

On aura donc

$$\varpi_{m,\alpha} = c_1 \cdot 1^\alpha + c_2 \cdot 2^\alpha + c_3 \cdot 3^\alpha + \dots + c_\rho \cdot \rho^\alpha + \dots + c_m \cdot m^\alpha.$$

Pour déterminer la constante c_ρ , multiplions par $1 - \rho x$ les deux membres de l'équation précédente et faisons

$$x = \frac{1}{\rho},$$

nous trouvons

$$c_\rho = \frac{1}{\rho^m \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \left(1 - \frac{2}{\rho}\right) \dots \left(1 - \frac{\rho-1}{\rho}\right) \left(1 - \frac{\rho+1}{\rho}\right) \dots \left(1 - \frac{m}{\rho}\right)};$$

d'où

$$\begin{aligned} c_{\rho} \cdot \rho^{\alpha} &= \frac{(-1)^{m-\rho} \cdot \rho^{\alpha-1}}{[\rho-1]^{\rho-1} [m-\rho]^{m-\rho}} \\ &= \frac{(-1)^{m-\rho}}{[m-1]^{m-1}} \cdot \frac{[m-1]^{\rho-1}}{[\rho-1]^{\rho-1}} \rho^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \varpi_{m,\alpha} &= \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \frac{(-1)^{m-\rho} \cdot [m-1]^{\rho-1} \rho^{\alpha-1}}{[m-1]^{m-1} \cdot [\rho-1]^{\rho-1}} \\ &= \frac{m^{\alpha-1} - \frac{m-1}{1} (m-1)^{\alpha-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} (m-2)^{\alpha-1} - \dots \pm 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m-1} \end{aligned} \right.$$

5. Les formules (1), (2), (3) et (4) donnent la solution complète du problème proposé. Pour une valeur quelconque de h , différente de l'unité, on aura

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^{\alpha} \cdot h^{n-1} \\ &= \sum_{m=1}^{m=\alpha} \frac{h^m \cdot [m]^m \cdot \varpi_{m,\alpha}}{h-1} \cdot \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \frac{[a+n]^{\mu} \cdot h^{\mu} - [a]^{\mu}}{[\mu]^{\mu} \cdot h^{\mu} \cdot (1-h)^{m-\mu}}. \end{aligned}$$

Si, dans le cas où $h = 1$, on remplace a par $\frac{a}{r}$ et qu'on multiplie les deux membres par r^{α} , on aura la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est a et dont la raison est r :

$$\begin{aligned}
 & a^\alpha + (a+r)^\alpha + (a+2r)^\alpha + \dots + [a+(n-1)r]^\alpha \\
 &= r^\alpha \sum_{m=1}^{m=\alpha} \frac{\left[\frac{a}{r} + n\right]^{m+1} - \left[\frac{a}{r}\right]^{m+1}}{m+1} \\
 & \times \frac{m^{\alpha-1} - \frac{m-1}{1}(m-1)^{\alpha-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(m-2)^{\alpha-1} - \dots \pm 1}{1.2.3\dots(m-1)}
 \end{aligned}$$

Cette formule a été donnée pour la première fois par M. Puiseux dans le XI^e volume du *Journal* de M. Liouville.

Toutefois l'expression générale (4) de la fonction $\omega_{m,\alpha}$ est fort mal appropriée au calcul. Le plus simple, dans les applications, sera de former pour cette fonction un triangle arithmétique, analogue à celui de Pascal pour les coefficients binomiaux. En voici un pour les dix premières puissances :

$\alpha =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	3	7	15	31	63	127	255	511
3			1	6	25	90	301	966	3025	9330
4				1	10	65	350	1701	7770	34105
5					1	15	140	1050	6951	42525
6						1	21	266	2646	22827
7							1	28	462	19980
8								1	36	750
9									1	45
10										1

Pour former et continuer ce tableau :

« Inscrivez d'abord l'unité dans toutes les cases de la première ligne horizontale et de la diagonale ;

» Les autres termes de chaque tranche horizontale s'obtiendront chacun en ajoutant au produit du terme précédent multiplié par le nombre qui exprime le rang de cette tranche, le terme situé immédiatement au-dessous de celui-là. »

Le nombre $\varpi_{m,\alpha}$ sera celui qui dans ce tableau est situé en même temps dans la tranche horizontale dont le rang est m et dans la colonne verticale dont le rang est α .

La première partie de la règle résulte des deux équations

$$\varpi_{1,\alpha} = 1, \quad \varpi_{\alpha,\alpha} = 1.$$

La seconde partie n'est que l'énoncé de l'équation

$$\varpi_{m,\alpha} = m \varpi_{m,\alpha-1} + \varpi_{m-1,\alpha-1}.$$

Veut-on, par exemple, la somme des cinquièmes puissances des termes d'une progression arithmétique, on prendra les coefficients $\varpi_{m,5}$ dans la cinquième colonne verticale du triangle précédent et la formule (1) donnera

$$= r^5 \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{n=n} [a + (n-1)r]^5 \\ & \frac{\left[\frac{a}{r} + n\right]^2 - \left[\frac{a}{r}\right]^2}{2} + 15 \frac{\left[\frac{a}{r} + n\right]^3 - \left[\frac{a}{r}\right]^3}{3} \\ & + 25 \frac{\left[\frac{a}{r} + n\right]^4 - \left[\frac{a}{r}\right]^4}{4} + 10 \frac{\left[\frac{a}{r} + n\right]^5 - \left[\frac{a}{r}\right]^5}{5} \\ & + \frac{\left[\frac{a}{r} + n\right]^6 - \left[\frac{a}{r}\right]^6}{6} \end{aligned} \right\}.$$

(37)

6. Quant à la série $\sum_{n=1}^{n=n} [a + n - 1]^\alpha h^{n-1}$, on en ob-

tient immédiatement la somme à l'aide des résultats obtenus précédemment (n^{os} 2 et 3).

Considérons la série

$$x_\alpha = \sum_{n=1}^{n=n} [a + n - 1]^\alpha (h + \tau)^{a+n-1-\alpha}.$$

En différentiant les deux membres, on obtient la relation

$$D_\tau \cdot x_\alpha = \sum_{n=1}^{n=n} [a + n - 1]^{\alpha+1} (h + \tau)^{a+n-1-(\alpha+1)} = x_{\alpha+1};$$

on a, par conséquent,

$$x_\alpha = D_\tau^\alpha \cdot \frac{(h + \tau)^{a+n} - (h + \tau)^\alpha}{h - 1 + \tau} = D_\tau^\alpha \cdot x_0.$$

Or nous avons vu (n^o 3) que l'on peut toujours poser, en supposant τ très-petit,

$$x_0 = A_0 + A_1 \tau + A_2 \tau^2 + \dots + A_m \tau^m + \dots,$$

A_m étant défini par l'équation (1) ou par l'équation (3) suivant que h a une valeur différente de l'unité ou qu'il est égal à l'unité.

On aura donc

$$x_\alpha = [\alpha]^\alpha A_\alpha + [\alpha + 1]^\alpha A_{\alpha+1} \tau + \dots$$

En faisant $\tau = 0$ et divisant les deux membres par $h^{a-\alpha}$,

on obtient la somme cherchée

$$\sum_{n=1}^{n=n} [a+n-1]^\alpha h^{n-1} = h^{-a+\alpha} [\alpha]^\alpha \mathbf{A}_\alpha.$$

Si $h = 1$, cette formule donne le résultat connu

$$\sum_{n=1}^{n=n} [a+n-1]^\alpha = \frac{[a+n]^{\alpha+1} - [a]^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

7. On peut obtenir sous d'autres formes l'expression de la fonction $\varpi_{m,\alpha}$. En effet, si l'on pose, pour abrégé,

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\dots(1-mx)} = F(x),$$

$\varpi_{m,\alpha}$ est le coefficient de x^α dans le développement de $x^m \cdot F(x)$ suivant les puissances entières et positives de x ; on aura donc autant de manières de l'obtenir qu'il y a de manières d'effectuer le développement de $x^m \cdot F(x)$.

Or si nous désignons généralement par p_n la somme des produits n à n des nombres $1, 2, 3, \dots, m$, nous aurons

$$(1-x)(1-2x)(1-3x)\dots(1-mx) \\ = 1 - p_1 x + p_2 x^2 - p_3 x^3 + p_4 x^4 - \dots \pm p_m x^m = 1 - X$$

en posant

$$p_1 x - p_2 x^2 + p_3 x^3 - \dots \mp p_m x^m = X.$$

On aura donc

$$F(x) = \frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + \dots \\ = 1 + p_1 x + (p_1^2 - p_2) x^2 + (p_1^3 - 2p_1 p_2 + p_3) x^3 + \dots,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \varpi_{m,m} &= 1, & \varpi_{m,m+1} &= p_1, \\ \varpi_{m,m+2} &= p_1^2 - p, & \varpi_{m,m+3} &= p_1^3 - 2p_1 p_2 + p_3, \dots \end{aligned}$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned} p_1 &= \sum_{m=1}^{m=m} m \cdot \frac{m(m+1)}{2}, \\ p_2 &= \sum_{m=2}^{m=m} m \cdot \frac{m(m-1)}{2}, \\ p_3 &= \sum_{m=3}^{m=m} m \sum_{m=2}^{m=m-1} m \cdot \frac{m(m-1)}{2}, \dots \end{aligned}$$

En appliquant la formule générale,

$$\sum_{m=\alpha}^{m=m} [m]^\alpha = \frac{(m+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

on trouve

$$\begin{aligned} p_2 &= \sum_{m=2}^{m=m} \left\{ \frac{m(m-1)(m-2)}{2} + m(m-1) \right\} \\ &= \frac{[m+1]^4}{2 \cdot 4} + \frac{[m+1]^3}{3} = \frac{(m+1)m(m-1)(3m-2)}{24}, \\ p_3 &= \sum_{m=3}^{m=m} \left\{ \frac{[m]^4(m-4)}{2 \cdot 4} + \frac{[m]^4}{2} + \frac{[m]^3(m-3)}{3} + [m]^3 \right\} \\ &= \frac{[m+1]^6}{48} + \frac{[m+1]^5}{10} + \frac{[m-1]^5}{15} + \frac{[m+1]^4}{4} \\ &= \frac{(m+1)^2 m^2 (m-1)(m-2)}{48}. \end{aligned}$$

On aura par suite

$$\varpi_{m,m+2} = \frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24},$$

$$\varpi_{m,m+3} = \frac{m^2(m+1)^2(m+2)(m+3)}{48}.$$

En comparant ces valeurs de $\varpi_{m,m}$, $\varpi_{m,m+1}$, $\varpi_{m,m+2}$, $\varpi_{m,m+3}$, ..., avec celles que fournit la formule (4), on obtient les relations données par M. Puiseux dans le Mémoire déjà cité.

On reconnaît aussi que $\varpi_{m,\alpha} = 0$ si m est plus grand que α . On a donc ce théorème :

m désignant un nombre entier et positif quelconque, si n est un nombre entier et positif plus petit que m - 1, on a la relation

$$m^n - \frac{m-1}{1} (m-1)^n + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} (m-2)^n - \dots \pm 1 = 0.$$
