GERONO

# Notes sur quelques questions du programme officiel

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 15 (1856), p. 322-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__322_0>

# NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

## I.

*Discussion d'une équation numérique du second degré à trois variables.*

Nous supposerons que les trois équations du premier degré

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0,$$

qui déterminent les coordonnées du centre, aient une solution *finie* et une seule; en prenant pour origine le point déterminé par cette solution, l'équation à discuter aura la forme

$$(1) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0,$$

et la valeur du polynôme

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

sera différente de zéro (*).

Nous admettrons de plus que le terme indépendant F n'est pas nul.

(*) Ce polynôme est, comme on sait, le dénominateur commun des valeurs qu'on obtient en résolvant les équations

$$\frac{1}{2}f'_x = 0, \quad \frac{1}{2}f'_y = 0, \quad \frac{1}{2}f'_z = 0.$$

On le nomme le *déterminant* des fonctions linéaires $\frac{1}{2}f'_x$, $\frac{1}{2}f'_y$, $\frac{1}{2}f'_z$, ou bien encore l'*invariant* de la fonction homogène du second degré

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy.$$

Nous le désignerons par la lettre D.

1. En faisant successivement

$$z=0, \quad y=0, \quad x=0$$

dans l'équation (1), on aura les sections de la surface par les plans des coordonnées. Si parmi ces trois sections on trouve deux lignes *réelles* d'espèces différentes, la surface sera un hyperboloïde à une nappe. Car, en coupant un hyperboloïde à deux nappes, ou un ellipsoïde par des plans qui contiennent le centre de la surface, on n'obtient jamais des lignes réelles d'espèces différentes.

Si parmi les trois sections dont il s'agit, on trouve une ligne *réelle* et une ligne *imaginaire*, la surface sera un hyperboloïde à deux nappes. Car, la surface sera réelle, et la seule surface réelle du second degré, à centre unique, qui puisse être coupée suivant une ligne imaginaire par un plan contenant le centre, est l'hyperboloïde à deux nappes.

D'après cela, on voit qu'il n'y a lieu à discussion qu'autant que les trois sections sont de même nature.

2. Elles peuvent être, toutes trois, du genre parabolique.

On aura alors

$$B''^2 - AA' = 0, \quad B'^2 - AA'' = 0, \quad B^2 - A'A'' = 0.$$

Aucun des coefficients A, A', A'' ne sera nul; car, si l'on avait, par exemple, $A=0$, il en résulterait

$$B'=0, \quad B''=0,$$

et l'équation (1) se réduisant à

$$A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + F = 0,$$

ne contiendrait que deux variables, ce qui ne peut avoir lieu quand la surface a un centre unique. Les relations

$$B''^2 - AA' = 0, \quad B'^2 - AA'' = 0,$$

montrent, de plus, que les trois coefficients A, A′, A″ doivent avoir le même signe.

*Suivant que le signe commun à* A, A′, A″ *sera différent de celui du terme indépendant* F *ou le même que celui de* F, *la surface sera un hyperboloïde à une nappe ou un hyperboloïde à deux nappes.*

En effet, dans le premier cas, les sections par les plans des coordonnées étant chacune formées de deux droites réelles, il est clair que la surface est un hyperboloïde à une nappe. Et de là on peut conclure que, dans l'autre cas, la surface est nécessairement un hyperboloïde à deux nappes. C'est ce que nous allons faire voir.

En admettant pour plus de précision que A, A′, A″ soient positifs, le terme indépendant F sera négatif quand les sections seront formées de droites réelles, et l'équation proposée aura la forme

$$(2)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = K^2.$$

Comme elle représente alors un hyperboloïde à une nappe, en prenant pour axes des $x$ et des $y$ les deux axes réels de l'hyperboloïde et pour axe des $z$ l'axe imaginaire, on réduira l'équation précédente à

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = K^2,$$

le terme indépendant ne sera pas changé puisqu'on a conservé la même origine. Quand F est positif, l'équation proposée devient

$$(3)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = -K^2;$$

et la même transformation de coordonnées qui réduit l'équation (2) à

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = K^2,$$

donnera pour (3) l'équation

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = -K^2,$$

qui représente évidemment un hyperboloïde à deux nappes (*).

3. Les trois sections par les plans des coordonnées peuvent être du genre elliptique. Dans ce cas, on a les inégalités

$$B''^2 - AA' < 0,\quad B'^2 - AA'' < 0,\quad B^2 - A'A'' < 0.$$

Les trois coefficients A, A', A'' sont différents de zéro et ils ont le même signe. Quand le signe commun à A, A', A'' sera le même que celui du terme indépendant F, les trois ellipses seront imaginaires, et elles seront, au contraire, réelles si le signe de A, A', A'' est différent de celui de F. Dans le premier cas, la surface ne peut être qu'un hyperboloïde à deux nappes ou une surface imaginaire. Dans le second, elle sera un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une nappe.

Nous allons discuter l'équation proposée dans chacune de ces deux hypothèses.

1°. *Si les sections sont des ellipses imaginaires, l'équation représentera un hyperboloïde à deux nappes ou une surface imaginaire suivant que l'*invariant

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

---

(*) En général, si, $f(x, y, z)$ étant une fonction homogène du second degré, l'équation

$$f(x, y, z) + h = 0$$

représente un hyperboloïde à une nappe, l'équation

$$f(x, y, z) - h = 0$$

représentera un hyperboloïde à deux nappes. Car la première pourra être ramenée à la forme

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = K^2;$$

et, par la même transformation de coordonnées, la seconde deviendra

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = -K^2.$$

*aura un signe différent de celui du terme indépendant* F, *ou le même signe que* F.

*Démonstration*. Les quantités A, $B''^2 - AA'$ étant différentes de zéro, le polynôme homogène

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$

pourra être transformé en cette somme algébrique de carrés

$$\frac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A} + \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} + \frac{Dz^2}{AA' - B''^2} \text{ (*)}.$$

et, par suite, l'équation proposée deviendra

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A} + \dfrac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} \\ \qquad + \dfrac{Dz^2}{AA' - B''^2} + F = 0. \end{array} \right.$$

Or, les coefficients A, F sont supposés de même signe; d'ailleurs, la différence $AA' - B''^2$ est positive, donc les trois termes

$$\frac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A}, \quad \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)}, \quad F,$$

sont à la fois ou positifs ou négatifs. Cela posé, si l'invariant D a un signe contraire à celui de F, la surface représentée par l'équation (4) ne peut être imaginaire puisque l'intersection de cette surface par le plan

$$Ax + B''y + B'z = 0$$

---

(*) La transformation dont il s'agit ici n'offre qu'une application particulière d'une théorie très-remarquable qui est due à M. Hermite. Les propositions élémentaires de cette théorie ont été exposées dans la dernière édition du *Programme* que j'ai publié avec M. Roguet.

est une hyperbole dont la projection sur le plan des $yz$ a pour équation

$$\frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} + \frac{Dz^2}{AA' - B''^2} + F = 0.$$

Par conséquent, cette surface est un hyperboloïde à deux nappes.

Quand l'invariant D a le même signe que le terme indépendant F, l'équation (4) n'admet aucune solution réelle, parce que le premier membre est la somme de quatre carrés précédés du même signe, et dont l'un est indépendant des variables.

2°. *Lorsque les sections sont des ellipses réelles, l'équation proposée représente un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une nappe suivant que l'invariant*

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

*a un signe contraire à celui du terme indépendant* F, *ou le même signe que ce terme.*

*Démonstration.* On peut, comme précédemment, mettre l'équation proposée sous la forme

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A} + \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} \\ &\qquad + \frac{Dz^2}{AA' - B''^2} + F = 0. \end{aligned} \right.$$

Mais A et F ont maintenant des signes contraires, parce que les ellipses qui résultent des intersections de la surface par les plans des coordonnées sont supposées réelles. De plus, $AA' - B''^2$ est une quantité positive; il s'ensuit que si l'invariant D et le terme indépendant F n'ont pas le même signe, les trois carrés $\frac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A}$,

$\frac{[(AA'-B''^2)y+(AB-B'B'')z]^2}{A(AA'-B''^2)}$, $\frac{Dz^2}{AA'-B''^2}$ auront leurs coefficients positifs quand F sera négatif, et inversement; on en conclura que l'équation (4) représente alors une surface limitée qui ne peut être qu'un ellipsoïde (*).

Lorsque D et F ont le même signe, deux des carrés qui composent le premier membre de l'équation (4) sont précédés du signe + et les deux autres du signe —. Il est, par cela même, évident que la surface admet des génératrices rectilignes; par conséquent, cette surface est un hyperboloïde à une nappe. C'est ce qu'il fallait démontrer.

4. Supposons actuellement que les sections par les plans des coordonnées soient des hyperboles.

On aura

$$B''^2 - AA' > 0,\quad B'^2 - AA'' > 0,\quad B^2 - A'A'' > 0;$$

les coefficients A, A′, A″ pourront être positifs, négatifs ou nuls. Nous allons faire voir que, dans tous les cas, *la surface sera un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes suivant que l'invariant* D *et le terme indépendant* F *auront le même signe ou des signes contraires.*

En admettant d'abord que les carrés des trois variables ne manquent pas à la fois, l'un des trois coefficients A, A′, A″, par exemple A, ne sera pas nul, on pourra alors

(*) En prenant pour plans de coordonnées les trois plans déterminés par les équations

$$Ax + B''y + B'z = 0,$$

$$(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z = 0,\qquad z = 0,$$

l'équation de la surface prendra la forme

$$K^2x^2 + K'^2y^2 + K''^2z^2 = h^2,$$

et sous cette forme on reconnaît immédiatement qu'elle appartient à un ellipsoïde.

donner à l'équation proposée la forme

$$(4)\left\{\begin{aligned} &\frac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B}''y+\mathrm{B}'z)^2}{\mathrm{A}}+\frac{[(\mathrm{AA}'-\mathrm{B}''^2)y+(\mathrm{AB}-\mathrm{B}'\mathrm{B}'')z]^2}{\mathrm{A}(\mathrm{AA}'-\mathrm{B}''^2)}\\ &\qquad\qquad+\frac{\mathrm{D}z^2}{(\mathrm{AA}'-\mathrm{B}''^2)}+\mathrm{F}=0.\end{aligned}\right.$$

La différence $\mathrm{AA}'-\mathrm{B}''^2$ étant ici négative, on voit que les coefficients $\frac{1}{\mathrm{A}}$, $\frac{1}{\mathrm{A}(\mathrm{AA}'-\mathrm{B}''^2)}$ des deux premiers carrés ont des signes contraires, et qu'il en est de même des deux derniers termes $\frac{\mathrm{D}z^2}{\mathrm{AA}'-\mathrm{B}''^2}$ et F, quand D et F ont le même signe. Dans ce cas, en faisant passer ces deux derniers termes dans le second membre de l'équation, chacun des deux membres deviendra une différence de deux carrés, d'où il faut conclure que la surface représentée par l'équation proposée, admettant des génératrices rectilignes, est un hyperboloïde à une nappe.

Lorsque D et F ont des signes contraires, les deux termes $\frac{\mathrm{D}z^2}{\mathrm{AA}'-\mathrm{B}''^2}$ et F ont le même signe; alors, deux des trois carrés

$$\frac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B}''y+\mathrm{B}'z)^2}{\mathrm{A}},\quad \frac{[(\mathrm{AA}'-\mathrm{B}''^2)y+(\mathrm{AB}-\mathrm{B}'\mathrm{B}'')z]^2}{\mathrm{A}(\mathrm{AA}'-\mathrm{B}''^2)},$$
$$\frac{\mathrm{D}z^2}{\mathrm{AA}'-\mathrm{B}''^2},$$

seront affectés du même signe que F, et si l'on égale à zéro le troisième carré, on aura l'équation d'un plan passant par le centre de la surface et dont l'intersection avec la surface sera une ligne imaginaire (*); par consé-

(*) Supposez que le terme qui a un signe contraire à celui de F soit, par exemple, le premier terme $\frac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B}''y+\mathrm{B}'x)^2}{\mathrm{A}}$. Les coordonnées des quent, l'équation proposée représentera un hyperboloïde à deux nappes.

Quand on a, à la fois,

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0,$$

l'équation proposée devient

$$(5) \qquad 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0,$$

et l'invariant

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

se réduit à $2BB'B''$. Aucun des trois coefficients $B$, $B'$, $B''$ ne peut être nul.

Il est facile de reconnaître que la surface est un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes, suivant que le produit $BB'B''$ a le même signe que $F$, ou un signe différent de celui de $F$.

On voit d'abord que cette surface est indéfinie dans tous les sens, puisqu'en donnant à deux des variables des

---

points communs à la surface et au plan diamétral

$$Ax + B''y + B'x = 0$$

devront vérifier l'équation

$$\frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} + \frac{Dz^2}{(AA' - B''^2)} + F = 0.$$

Or, cette équation n'admet aucune solution réelle, puisque le premier membre est la somme de trois carrés précédés du même signe, et que l'un de ces carrés est indépendant des variables.

Au reste, en prenant pour plans de coordonnées les trois plans

$$Ax + B''y + B'x = 0,$$

$$(AB' - B''^2)y + (AB - B'B'')z = 0. \quad z = 0,$$

l'équation deviendra

$$K^2x^2 - k'^2y^2 - k''^2z^2 = h^2,$$

et il est alors évident qu'elle se rapporte à un hyperboloïde à deux nappes.

valeurs quelconques, la valeur correspondante de la troisième variable est constamment réelle. D'ailleurs la surface a un centre unique et n'est pas un cône, donc elle ne peut être que l'un des deux hyperboloïdes.

Pour savoir quel est celui des deux hyperboloïdes que l'équation (5) représente, il suffit de remarquer que pour les points communs à la surface et au plan

$$By + B'x = 0$$

mené par le centre, on a

$$By + B'x = 0 \quad \text{et} \quad 2B''xy + F = 0;$$

d'où

$$x = \pm B\sqrt{\frac{F}{2BB'B''}}.$$

Or, si le produit BB'B'' a le même signe que F, l'équation

$$x = \pm B\sqrt{\frac{F}{2BB'B''}}$$

détermine deux droites parallèles qui appartiennent à la surface considérée, et, par conséquent, l'équation (5) représente un hyperboloïde à une nappe. Si BB'B'' et F ont des signes différents, l'intersection de la surface et du plan central $By + B'x = 0$ est imaginaire, donc l'équation (5) se rapporte à un hyperboloïde à deux nappes.

5. De tout ce qui précède, nous concluons que pour reconnaître de quel genre est la surface représentée par l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0,$$

il suffit de déterminer les signes des différences

$$B^2 - A'A'', \quad B'^2 - AA'', \quad B''^2 - AA'$$

et de l'invariant

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

du polynôme homogène

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy,$$

ce qui n'exige aucune transformation de l'équation proposée.

Il est d'ailleurs facile d'exprimer les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation proposée

$$(1)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0$$

représente une surface d'un genre déterminé.

Si l'on veut, par exemple, que la surface soit un ellipsoïde, il faudra que la section faite par l'un des trois plans coordonnés soit une ellipse *réelle*, et de plus la surface devra être limitée. Ces conditions seront suffisantes.

En prenant pour plan sécant le plan des $xy$, les équations de la section seront

$$z = 0, \quad Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + F = 0,$$

et on exprimera que cette section est une ellipse réelle en posant

$$B''^2 - AA' < 0, \quad AF < 0.$$

Si l'on suppose le terme indépendant F négatif, ce qui est permis, les deux premières conditions deviendront

$$B''^2 - AA' < 0, \quad A > 0.$$

De plus, pour que la surface soit limitée, il faut et suffit qu'on ait

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 > 0 \quad (\text{n}^\circ\ 3,\ 2^\circ),$$

donc, en admettant que le terme indépendant F soit négatif, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0$$

représente une ellipse, consistent dans les trois inégalités :

$$A > 0,$$
$$AA' - B''^2 > 0,$$
$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 > 0.$$

*Remarque.* Une méthode différente de celle que nous avons suivie a conduit aux conditions

$$A + A' + A'' > 0,$$
$$AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 > 0,$$
$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 > 0\ (*).$$

On peut effectivement déduire ces dernières inégalités de celles que nous venons de trouver.

Car, en posant

$$D = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2,$$

on a

$$D = \frac{(AA' - B''^2)(AA'' - B'^2) - (AB - B'B'')^2}{A}$$

---

(*) Quand les coordonnées sont rectangulaires, la détermination des plans principaux et des axes des surfaces du second degré dépend de la résolution de l'équation du troisième degré

$$S^3 - (A + A' + A'')S^2 + (AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2)S$$
$$- (AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2) = 0.$$

On a démontré que le premier membre de cette équation doit offrir trois variations de signes lorsque l'équation du second degré

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''xy + F = 0,$$

représente un ellipsoïde, en admettant que F soit négatif. On a donc les trois conditions

$$A + A' + A'' > 0,$$
$$AA' + AA' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 > 0,$$
$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 > 0,$$

et, par conséquent, les inégalités supposées

$$A > 0, \quad AA' - B''^2 > 0, \quad D > 0$$

donnent

$$AA'' - B'^2 > 0,$$

et, par suite,

$$A'' > 0.$$

On a aussi

$$D = \frac{(AA'' - B'^2)(A'A'' - B^2) - (A''B'' - BB')^2}{A''},$$

d'où

$$A'A'' - B^2 > 0, \quad A' > 0.$$

En additionnant les trois inégalités

$$A > 0, \quad A' > 0, \quad A'' > 0,$$

il vient

$$A + A' + A'' > 0.$$

De même, l'addition des trois inégalités

$$AA' - B''^2 > 0, \quad AA'' - B'^2 > 0, \quad A'A'' - B^2 > 0$$

donne

$$AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 > 0.$$

C'est ce qu'il fallait trouver.

6. Nous avons jusqu'à présent admis que l'équation proposée contenait un terme indépendant des variables; lorsqu'il en est autrement, cette équation se réduit à

$$(5) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0,$$

et elle ne peut représenter qu'une surface conique ou l'origine des coordonnées, en supposant toujours que l'invariant D ne soit pas nul.

Quand les trois différences $B''^2 - AA'$, $B'^2 - AA''$, $B^2 - A'A''$ ne sont pas à la fois négatives, on trouve au moins une ligne réelle parmi les trois sections des plans coordonnés, et, par conséquent, l'équation proposée appartient à un cône.

La discussion se borne donc à l'examen du cas particulier où les trois différences dont il s'agit étant négatives, les sections par les plans coordonnés ne donnent qu'un seul point qui est l'origine.

On a déjà fait observer (n° 3) que dans ce cas le polynôme homogène

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$

peut être remplacé par

$$\frac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A} + \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} + \frac{Dz^2}{AA' - B''^2};$$

il s'ensuit que l'équation proposée revient à

$$(6)\quad \left\{ \frac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A} + \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} + \frac{Dz^2}{AA' - B''^2} = 0. \right.$$

Lorsque D et A auront le même signe, les coefficients $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A(AA' - B''^2)}$, $\frac{D}{AA' - B''^2}$ des trois carrés qui forment le premier membre de l'équation (6) seront à la fois ou positifs ou négatifs, et alors l'équation (6) n'admettant que la seule solution réelle $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, représentera l'origine des coordonnées.

Si D et A ont des signes contraires, les deux premiers coefficients $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A(AA' - B''^2)}$ seront positifs, et le troisième $\frac{D}{AA' - B''^2}$ négatif ou inversement, et il est évident que l'équation admettra une infinité de solutions réelles, elle représentera donc un cône ayant son centre à l'origine (*).

D'après cela, on voit que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0$$

représente un point sont exprimées par ces quatre inégalités

$$B''^2 - AA' < 0, \quad B'^2 - AA'' < 0, \quad B^2 - A'A'' < 0, \quad AD > 0.$$

G.

---

(*) Si, par exemple, D est négatif et A positif en prenant pour plans de coordonnées les trois plans

$$Ax + B''y + B'z = 0,$$
$$(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z = 0, \qquad z = 0,$$

l'équation (6) se ramènera à la forme

$$K^2x^2 + K'^2y^2 - K''^2z^2 = 0,$$

d'où

$$K^2x^2 = (K''z + K'y)(K''z - K'y):$$

la surface représentée est évidemment un cône dont les géneratrices ont pour équations

$$Kx = \lambda(K''z + K'y),$$
$$Kx = \frac{1}{\lambda}(K''z - K'y)$$