NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PEPIN

Solution de la question sur un jeu de cartes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 378-380

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__378_1>

SOLUTION DE LA QUESTION SUR UN JEU DE CARTES

(voir t. XIV, p. 168);

PAR M. L'ABBE PEPIN.

Réponse. Soit t le plus petit nombre entier qui satisfasse à l'inégalité

$$\frac{m}{n^{t-1}} \leqq 1,$$

ce nombre t sera le nombre demandé.

Solution. Après la première distribution, la carte désignée pourra occuper un rang quelconque dans le paquet où elle se trouve; mais après la seconde distribution, les cartes provenant des q paquets situés au-dessous ou au-dessus du paquet r_1 occuperont les l_2 premières et les l_2 dernières places de chaque paquet, l_2 étant égal à la partie entière de la fraction $\frac{q.m}{n}$, c'est-à-dire

$$(1) \qquad l_2 = \mathrm{E}\left(\frac{q.m}{n}\right).$$

Ainsi le rang s_2 occupé par la carte désignée dans le paquet r_2 sera compris entre les deux nombres

$$l_2 \quad \text{et} \quad m - l_2 + 1.$$

Généralement, désignons par l_t le nombre des cartes qui se trouvent au-dessus et au-dessous de la carte désignée après t distributions dans le paquet r_t. On aura évidemment

$$(2) \qquad l_{t+1} = \mathrm{E}\left(\frac{q.m + l_t}{n}\right);$$

et le rang s_{t+1} qu'elle occupera dans le paquet r_{t+1} sera compris entre les deux nombres l_{t+1} et $m - l_{t+1} + 1$.

La formule (2) donnera successivement

$$l_3 = \mathrm{E}\left(\frac{q.m + l_2}{n}\right), \quad l_4 = \mathrm{E}\left(\frac{q.m + l_3}{n}\right), \ldots.$$

Mais si l'on observe que la partie entière du quotient d'une division ne change pas quand on remplace le dividende par un nombre qui n'en diffère en plus que d'une quantité plus petite que l'unité, on aura

$$l_3 = \mathrm{E}\left(\frac{q.m + \frac{qm}{n}}{n}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{q.m}{n^2} \cdot \frac{n^2 - 1}{n - 1}\right),$$

$$l_4 = \mathrm{E}\left[\frac{q.m + \frac{q.m(n^2-1)}{n^2(n-1)}}{n}\right] = \mathrm{E}\left(\frac{q.m}{n^3} \cdot \frac{n^3 - 1}{n - 1}\right);$$

et généralement

$$l_t = \mathrm{E}\left(\frac{q.m}{n^{t-1}}\cdot\frac{n^{t-1}-1}{n-1}\right).$$

or le rang s_t étant compris entre les deux nombres l_t et $m - l_t + 1$, si l'on veut qu'il soit égal à $p + 1$, il faut et il suffit que l'on ait $l_t = p$; car alors on aura

$$m - l_t + 1 = p + 2,$$

et le nombre entier s_t compris entre p et $p + 2$ ne pourra être que le nombre $p + 1$.

Le nombre t devra donc satisfaire à l'inégalité

$$0 \leqq \frac{q.m}{n^{t-1}}\cdot\frac{n^{t-1}-1}{n-1} - p < 1.$$

En remplaçant $n - 1$ par $2q$, p par $\frac{m-1}{2}$, et réduisant, cette inégalité peut se mettre sous la forme suivante :

$$0 \leqq \frac{1 - \frac{m}{n^{t-1}}}{2} < 1.$$

D'ailleurs il est évident que cette inégalité est équivalente à la suivante

$$(3) \qquad \frac{m}{n^{t-1}} \leqq 1.$$

Le nombre demandé t est donc le plus petit nombre entier qui satisfasse à la formule (3). C. Q. F. D.