NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GERONO

Notes sur quelques questions du programme officiel

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 388-399

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__388_0>

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

II.

Génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique.

Hyperboloïde à une nappe. — Le centre de la surface étant pris pour origine, l'équation sera de la forme

$$(1)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0.$$

1. Quand l'une des trois différences

$$B''^2 - AA',\quad B'^2 - AA'',\quad B^2 - A'A''$$

est nulle, ou, ce qui revient au même, lorsqu'une des trois sections par les plans coordonnés est du genre des paraboles, on tire immédiatement de l'équation (1) de la surface les équations de ses génératrices rectilignes.

Soit, par exemple,

$$B''^2 - AA' = 0,$$

on aura identiquement :

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 = \frac{(Ax + B''y)^2}{A},$$

et l'équation (1) deviendra

$$A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + \frac{(Ax + B''y)^2}{A} + F = 0,$$

d'où

$$Az(A''z + 2By + 2B'x) = -AF - (Ax + B''y)^2.$$

Le produit AF est nécessairement négatif, autrement le plan $z = 0$ qui passe par le centre ne couperait pas la surface, ce qui ne peut avoir lieu puisque cette surface est un hyperboloïde à une nappe. Donc

$$-\mathrm{AF} - (\mathrm{A}x + \mathrm{B}''y)^2$$

est le produit des facteurs *réels*

$$\sqrt{-\mathrm{AF}} + \mathrm{A}x + \mathrm{B}''y, \qquad \sqrt{-\mathrm{AF}} - \mathrm{A}x - \mathrm{B}''y.$$

Par conséquent, en nommant α, β deux constantes arbitraires, les équations des génératrices rectilignes seront, pour l'un des deux systèmes :

$$\mathrm{A}z = \alpha\left(\sqrt{-\mathrm{AF}} + \mathrm{A}x + \mathrm{B}''y\right),$$

$$\mathrm{A}''z + 2\mathrm{B}y + 2\mathrm{B}'x = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{-\mathrm{AF}} - \mathrm{A}x - \mathrm{B}''y\right).$$

Et, pour l'autre :

$$\mathrm{A}z = \beta\left(\sqrt{-\mathrm{AF}} - \mathrm{A}x - \mathrm{B}''y\right),$$

$$\mathrm{A}''z + 2\mathrm{B}y + 2\mathrm{B}'x = \frac{1}{\beta}\left(\sqrt{-\mathrm{AF}} + \mathrm{A}x + \mathrm{B}''y\right).$$

Comme exemple, considérons l'équation

$$x^2 + 4y^2 + z^2 + 2yz - xz + 4xy - 1 = 0$$

En faisant

$$z = 0,$$

on a

$$x^2 + 4y^2 + 4xy - 1 = 0$$

ou

$$(x + 2y)^2 - 1 = 0,$$

équation qui représente le système de deux droites parallèles.

Pour déterminer toutes les autres génératrices rectilignes de la surface, on remarquera que l'équation proposée revient à

$$z^2 + 2yz - xz = 1 - (x + 2y)^2,$$

d'où

$$z(z + 2y - x) = (1 + x + 2y)(1 - x - 2y).$$

De sorte que les génératrices rectilignes de l'un des deux systèmes seront représentées par

$$z = \alpha(1 + x + 2y),$$

$$z + 2y - x = \frac{1}{\alpha}(1 - x - 2y).$$

Pour les génératrices appartenant au second système, on aura

$$z = 6(1 - x - 2y),$$

$$z + 2y - x = \frac{1}{6}(1 + x + 2y).$$

2. Si aucune des trois différences $B''^2 - AA'$, $B'^2 - AA''$, $B^2 - A'A''$ n'est nulle, on pourra déterminer les équations générales des génératrices rectilignes en transformant l'équation (1) proposée, comme nous allons l'indiquer.

Remarquons d'abord que cette équation revient à

$$(2) \qquad xf'_x + yf'_y + zf'_z + 2F = 0,$$

en posant

$$(3) \qquad f'_x = 2Ax + 2B''y + 2B'z,$$

$$(4) \qquad f'_y = 2B''x + 2A'y + 2Bz,$$

$$(5) \qquad f'_z = 2B'x + 2By + 2A'z.$$

Les dérivées f'_x, f'_y, f'_z peuvent être considérées comme trois nouvelles variables liées aux anciennes x, y, z par les relations (3), (4), (5), et il est clair que ces relations permettent d'obtenir l'équation de la surface en fonction de trois quelconques des six variables f_x', f_y', f_z', x, y, z; il suffit pour cela d'éliminer les trois autres entre les quatre équations (2),..., (5).

Parmi les différentes formes que l'on peut ainsi donner à l'équation de la surface, il en est une qui se prête facilement à la détermination des génératrices rectilignes parce qu'elle ne contient que les carrés des variables et un seul des trois rectangles. Cette équation s'obtient en prenant pour variable une seule des trois anciennes coordonnées, z par exemple, et les dérivées f_x', f_y' relatives aux deux autres x, y.

Les quantités à éliminer sont x, y, f_z'; l'élimination donne pour résultat l'équation

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} A f_y'^2 - 2B'' f_x' f_y' + A' f_x'^2 + 4Dz^2 \\ \qquad + 4(AA' - B''^2)F = 0, \end{array} \right.$$

dans laquelle D représente l'invariant

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2.$$

Il est à remarquer que cette équation se déduit, par une règle très-simple, de l'équation proposée

$$(1)\quad Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + F = 0.$$

Car la partie $A f_y'^2 - 2B'' f_x' f_y' + A' f_x'^2$ qui renferme les dérivées f_y', f_x' relatives à y et x s'obtient en remplaçant x par f_y' et y par $-f_x'$ dans le trinôme

$$Ax^2 + 2B''^2 xy + A'y^2,$$

qui, dans l'équation (1) proposée, représente l'assemblage des termes contenant seulement y et x. Le terme indépendant $4(AA' - B''^2)F$ se forme en multipliant le terme indépendant des variables de l'équation proposée par le quadruple de l'invariant $(AA' - B''^2)$ du même trinôme

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2.$$

L'application de cette règle montre que la surface peut être aussi représentée par chacune des deux équations :

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} A''f_x'^2 - 2B'f_x'f_z' + Af_z'^2 + 4Dy^2 \\ \quad + 4(AA'' - B'^2)F = 0, \end{array}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} A''f_y'^2 - 2Bf_y'f_z' + A'f_z'^2 + 4Dx^2 \\ \quad + 4(A'A'' - B^2)F = 0, \end{array}\right.$$

lorsque les invariants $AA'' - B'^2$, $A'A'' - B^2$ ne sont pas nuls.

3. Au moyen de l'une quelconque des équations transformées (7), (8), (9), il est facile d'obtenir les équations générales des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.

En considérant, par exemple, l'équation (7), nous distinguerons deux cas, suivant que $B''^2 - AA'$ sera positif ou négatif.

1°. Supposons qu'on ait $B''^2 - AA' > 0$ et que les coefficients A, A' ne soient pas nuls.

Le trinôme $Af_y'^2 - 2B''f_x'f_y' + A'f_x'^2$ se décompose alors en deux facteurs réels du premier degré qui sont

$$Af_y' - \left(B'' + \sqrt{B''^2 - AA'}\right)f_x'$$

et

$$\frac{Af_y' - \left(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\right)f_x'}{A}.$$

De plus D et $(AA' - B''^2)F$ ont des signes contraires, car autrement le plan

$$Af_y' - \left(B'' + \sqrt{B''^2 - AA'}\right)f_x' = 0,$$

qui passe par le centre de l'hyperboloïde, couperait la surface suivant une ligne imaginaire dont l'équation serait

$$4Dz^2 + 4(AA' - B''^2)F = 0.$$

Donc le binôme

$$4Dz^2 + 4(AA' - B''^2)F$$

est aussi décomposable en deux facteurs réels du premier degré. Si, pour fixer les idées, on suppose F positif, ces facteurs seront

$$4\left[z\sqrt{D} + \sqrt{(B''^2 - AA')F}\right]$$

et

$$\left[z\sqrt{D} - \sqrt{(B''^2 - AA')F}\right].$$

De là on peut conclure qu'en nommant α, 6 deux constantes arbitraires, les génératrices rectilignes auront pour équations

$$Af_y' - \left(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\right)f_x' = 4\alpha\left[\sqrt{(B''^2 - AA')F} + z\sqrt{D}\right],$$

$$\frac{Af_y' - \left(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\right)f_x'}{A} = \frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{(B''^2 - AA')F} - z\sqrt{D}\right],$$

ou

$$Af_y' - \left(B'' + \sqrt{B''^2 - AA'}\right)f_x' = 46\left[\sqrt{(B''^2 - AA')F} - z\sqrt{D}\right],$$

$$\frac{Af_y' - \left(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\,f_x'\right.}{A} = \frac{1}{6}\left[\sqrt{(B''^2 - AA')F} + z\sqrt{D}\right].$$

Lorsque $A = 0$, l'équation (7) devient

$$A'f_x'^2 - 2B''f_x'f_y' + 4Dz^2 - 4B''^2F = 0,$$

ou, en supposant toujours F positif,

$$f_x'[A'f_x' - 2B''f_y'] = 4\left[B''\sqrt{F} + z\sqrt{D}\right]\left[B''\sqrt{F} - z\sqrt{D}\right];$$

on en tire immédiatement les équations des génératrices rectilignes.

2°. Lorsque $B''^2 - AA' < 0$, le trinôme

$$Af_y'^2 - 2B''f_x'f_y' + A'f_x'^2$$

n'est plus décomposable en facteurs réels du premier degré, mais on peut alors le remplacer par la somme des deux carrés

$$\frac{(Af_y' - B''f_x')^2}{A}, \quad \frac{(AA' - B''^2)f_x'^2}{A},$$

et l'équation (7) deviendra

$$\begin{gathered}(Af_y' - B''f_x')^2 + (AA' - B''^2)f_x'^2 \\ + 4ADz^2 + 4(AA' - B''^2)AF = 0.\end{gathered}$$

Les deux premiers termes

$$(Af_y' - B''f_x')^2, \quad (AA' - B''^2)f_x'^2$$

sont évidemment positifs; quant aux deux derniers $4ADz^2, 4(AA' - B'')^2 AF$, ils doivent être négatifs puisque l'équation représente un hyperboloïde à une nappe (*). Il s'ensuit que chacune des deux expressions

$$(Af_y' - B''f_x')^2 + 4ADz^2$$

et

$$(AA' - B''^2)f_x'^2 + 4(AA' - B''^2)AF$$

est décomposable en deux facteurs réels du premier degré. Cette décomposition donne, comme on sait, les équations des génératrices rectilignes.

4. *Paraboloïde hyperbolique.* Nous supposerons main-

(*) Il faut que AF soit négatif pour que le plan $z = 0$ coupe l'hyperboloïde suivant une ligne réelle, et AD doit être négatif parce que l'hyperboloïde à une nappe est une surface illimitée dans tous les sens.

tenant que l'équation générale

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' xz \\ \qquad + 2 B'' xy + 2 C x + 2 C' y + 2 C'' z + F = 0 \end{array}\right.$$

représente un paraboloïde hyperbolique. Ainsi $D = 0$, et de plus l'une des trois sections de la surface par les plans des coordonnées étant nécessairement du genre hyperbolique, l'une des trois différences $B''^2 - AA'$, $B'^2 - AA''$, $B^2 - A'A''$ sera positive. On aura, par exemple,

$$B''^2 - AA' > 0.$$

Pour déterminer dans ces deux conditions les génératrices rectilignes de la surface que l'équation (1) représente, nous allons donner une autre forme à cette équation.

Posons

$$2 C x + 2 C' y + 2 C'' z + F = \varphi$$

et désignons par F'_x, F'_y, F'_z les dérivées du polynôme homogène

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' xz + 2 B'' xy.$$

On aura

$$(2)\qquad F'_x = 2 A\, x + 2 B'' y + 2 B' z,$$

$$(3)\qquad F'_y = 2 B'' x + 2 A' y + 2 B z,$$

$$(4)\qquad F'_z = 2 B' x + 2 B\, y + 2 A'' z.$$

Et l'équation (1) pourra d'abord s'écrire ainsi :

$$(5)\qquad x F'_x + y F'_y + z F'_z + 2\varphi = 0.$$

Si, entre les quatre équations (2), (3), (4), (5), on élimine x, y, F'_z en ayant égard à la condition $D = 0$, il viendra

$$(6) \qquad AF'^2_y - 2B''F'_xF'_y + A'F'^2_x = 4(B''^2 - AA')\varphi.$$

Le premier membre de cette dernière équation se déduit immédiatement du trinôme

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2$$

par l'application de la règle énoncée (n° 2, page 391); quant au second membre, on voit qu'il s'obtient en multipliant l'assemblage des termes du premier degré et du terme indépendant de l'équation proposée (1) par le quadruple de la différence $B''^2 - AA'$.

Cette différence étant positive, le trinôme

$$AF'^2_y - 2B''F'_xF'_y + A'F'^2_x$$

est décomposable en deux facteurs *réels* du premier degré, qui sont, lorsque A n'est pas nul,

$$AF'_y - \left(B'' + \sqrt{B''^2 - AA'}\right)F'_x$$

et

$$\frac{AF'_y - \left(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\right)F'_x}{A}.$$

Et, par conséquent, on a pour les équations des génératrices rectilignes :

$$AF'_y - \left(B'' + \sqrt{B''^2 - AA'}\right)F'_x = \alpha\varphi,$$

$$\frac{AF'_y - \left(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\right)F'_x}{A} = \frac{4(B''^2 - AA')}{\alpha};$$

ou

$$F'_y - \left(B'' + \sqrt{B'^2 - AA'}\right)F'_x = 6(B''^2 - AA'),$$

$$\frac{AF'_y - \left(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\right)F'_x}{A} = \frac{4\varphi}{6};$$

en désignant toujours par α et $\mathit{6}$ deux constantes arbitraires.

Lorsque

$$A = 0,$$

on a

$$AF_y'^2 - 2B''F_x'F_y' + A'F_x'^2 = F_x'[A'F_x' - 2B''F_y']$$

et

$$4(B''^2 - AA')\varphi = 4B''^2\varphi.$$

Les génératrices rectilignes ont alors pour équations

$$F_x' = \alpha\varphi, \quad A'F_x' - 2B''F_y' = \frac{4B''^2}{\alpha},$$

ou

$$F_x' = 4\mathit{6}B''^2, \; A'F_x' - 2B''F_y' = \frac{\varphi}{\mathit{6}}.$$

5. Prenons pour exemple l'équation complète

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 + 4z^2 + 2yz + 6xz + 4xy \\ \quad + 8x - 4y - 2z + 1 = 0, \end{array} \right.$$

qui représente un paraboloïde hyperbolique.

L'intersection de la surface par le plan des xy est l'hyperbole

$$x^2 - y^2 + 4xy + 8x - 4y + 1 = 0.$$

On a

$$A = 1, \quad A' = -1, \quad B'' = 2, \quad B''^2 - AA' = 5.$$

Donc, en nommant F_x', F_y' les dérivées par rapport à x et y de l'assemblage des termes du second degré de l'équation numérique proposée, cette équation pourra s'écrire ainsi

$$F_y'^2 - 4F_x'F_y' - F_x'^2 = 20\,(8x - 4y - 2z + 1).$$

Le trinôme

$$F_y'^2 - 4F_x'F_y' - F_x'^2$$

est le produit des facteurs réels

$$F'_y - (2+\sqrt{5})\,F'_x$$

et

$$F'_y - (2-\sqrt{5})\,F'_x :$$

par conséquent, les génératrices rectilignes de la surface ont pour équations

$$F'_y - (2-\sqrt{5})\,F'_x = \frac{20}{\alpha},$$

$$F'_y - (2+\sqrt{5})\,F'_x = \alpha\,(8x - 4y - 2z + 1)\,;$$

ou

$$F'_y - (2-\sqrt{5})\,F'_x = 6\,(8x - 4y - 2z + 1),$$

$$F'_y - (2+\sqrt{5})\,F'_x = \frac{20}{6}.$$

6. Considérons encore l'équation

$$4y^2 + z^2 + 4yz + 2xz + 4xy + x - y + 3z - 2 = 0,$$

qui se rapporte de même au paraboloïde hyperbolique.

En coupant la surface par le plan des xy on obtient l'hyperbole

$$4y^2 + 4xy + x - y - 2 = 0.$$

Les coefficients A, A', B'' ont pour valeurs 0, 4, 2; d'où

$$B''^2 - AA' = 4.$$

Donc l'équation proposée revient à

$$4F'^2_x - 4F'_xF'_y = 16\,(x - y + 3z - 2)$$

ou

$$F'_x\,[F'_x - F'_y] = 4\,(x - y + 3z - 2).$$

On en conclura que les équations des génératrices rectilignes sont

$$F'_x = \alpha(x - y + 3z - 2), \quad F'_x - F'_y = \frac{4}{\alpha}$$

ou

$$F'_x = 4\beta, \quad F'_x - F'_y = \frac{1}{\beta}(x - y + 3z - 2).$$

G.