ÉMILE MATHIEU

Nouveaux théorèmes sur les équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 409-430

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__409_1>

NOUVEAUX THÉORÈMES SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR ÉMILE MATHIEU,
Ancien elève de l'École Polytechnique.

Supposons donnée une équation algébrique de degré m, $u = 0$ ou $F(x) = 0$, et donnons à la variable x des valeurs croissant en progression par différence dont la raison soit h

$$\ldots,\ x_0 - 2h,\ x_0 - h,\ x_0,\ x_0 + h,\ldots,\ x_0 + mh,\ldots.$$

Le polynôme $F(x)$ prendra les valeurs

$$\ldots,\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ldots,\ u_m,\ldots.$$

Formons ensuite les différences premières, deuxièmes, troisièmes,..., $m^{\text{ièmes}}$ correspondantes aux valeurs que prend $F(x)$, l'objet principal de ce Mémoire est de démontrer que :

1°. L'équation

$$F(x) = 0$$

n'a pas plus de racines plus grandes que x_0, que la suite

$$u_0,\ \Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2},\ldots,\ \Delta^m u_{-m}$$

n'a de variations. Si le nombre des variations est plus grand que ce nombre de racines, la différence de ces nombres est un nombre pair.

2°. L'équation

$$F(x) = 0$$

n'a pas plus de racines plus petites que x_0, que la suite

$$u_0, \quad -\Delta u_0, \quad \Delta^2 u_0, \quad -\Delta^3 u_0, \ldots, \quad \pm \Delta^m u_0$$

n'a de variations. Si le nombre des variations est plus grand que ce nombre de racines, la différence de ces nombres est un nombre pair.

Je déduirai aussi de la théorie des différences le théorème de Budan, et je montrerai qu'avec les différences on peut résoudre le même problème qu'avec les dérivées qui entrent dans le théorème de Budan.

INTRODUCTION.

I. Indiquons une fois pour toutes les notations que nous emploierons.

Le polynôme algébrique que nous considérerons dans tout ce Mémoire sera du m^{ieme} degré et sera appelé tantôt u, tantôt $F(x)$.

Les dérivées premières, deuxièmes,..., m^{iemes} de ce polynôme seront ainsi désignées

$$F'(x), \quad F''(x), \ldots, F^{(m)}(x).$$

Substituons dans le polynôme $F(x)$ les termes de la progression suivante par différence dont la raison est h :

$$\ldots, \quad x_0 - 2h, \quad x_0 - h, \quad x_0, \quad x_0 + h, \ldots, \quad x_0 + ph, \ldots,$$

le polynôme $F(x)$ prendra les valeurs

$$\ldots, \quad F(x_0 - 2h), \quad F(x_0 - h), \quad F(x_0), \quad F(x_0 + h), \ldots, \\ F(x_0 + ph), \ldots,$$

que nous désignerons aussi par les notations

$$\ldots,\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_p,\ \ldots$$

Ainsi

$$u_p = \mathrm{F}(x_0 + ph)$$

et

$$u_{-p} = \mathrm{F}(x_0 - ph).$$

Formons les différences premières des termes de la suite

$$\ldots,\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ \ldots,\ u_p,\ \ldots;$$

nous les écrirons ainsi

$$\ldots,\quad u_0 - u_{-1} = \Delta u_{-1},\quad u_1 - u_0 = \Delta u_0,\ \ldots,$$
$$u_{p+1} - u_p = \Delta u_p.\ \ldots$$

Ainsi en général

$$\Delta u_p = u_{p+1} - u_p$$

et

$$\Delta u_{-p} = u_{-p+1} - u_{-p};$$

de même

$$\Delta^2 u_p = \Delta u_{p+1} - \Delta u_p$$

et

$$\Delta^2 u_{-p} = \Delta u_{-p+1} - \Delta u_{-p};$$

et ainsi de suite.

Nous aurons souvent à considérer les deux suites

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \ldots,\ \Delta^m u_0$$

et

$$u_0,\ \Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2},\ \ldots,\ \Delta^m u_{-m}.$$

Les termes de la première suite sont donnés par les formules

$$\Delta u_0 = \mathrm{F}(x_0 + h) - \mathrm{F}(x_0) = \theta(x_0),$$
$$\Delta^2 u_0 = \theta(x_0 + h) - \theta(x_0) = \chi(x_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et les termes de la deuxième suite sont donnés par les formules

$$\Delta u_{-1} = \mathrm{F}(x_0) - \mathrm{F}(x_0 - h) = \varphi(x_0),$$
$$\Delta^2 u_{-2} = \varphi(x_0) - \varphi(x_0 - h) = \psi(x_0),$$
$$\Delta^3 u_{-3} = \psi(x_0) - \psi(x_0 - h) = \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

II. Rappelons les formules

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} u_n &= u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots \\ &+ \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}\Delta^m u_0, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^n u_0 &= u_n - nu_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2} + \ldots \\ &\pm \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}u_{n-p}\ldots \pm u_0, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{C}) \quad \left\{ \begin{aligned} u = u_0 &+ \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\Delta u_0 \\ &+ \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h} - 1\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{h} - m + 1\right)\frac{\Delta^m u_0}{1.2.3\ldots m}. \end{aligned} \right.$$

III. u est aussi donné par la formule

$$(\mathrm{D}) \quad \left\{ \begin{aligned} u = u_0 &+ \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\Delta u_{-1} \\ &+ \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h} + 1\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{h} + m - 1\right)\frac{\Delta^m u_{-m}}{1.2.3\ldots m}. \end{aligned} \right.$$

Pour démontrer cette formule, on démontrera d'abord la généralité de celle-ci :

$$u_n = u_0 + n\,\Delta u_{-1} + \frac{n(n+1)}{1.2}\Delta^2 u_{-2} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots p}\Delta^p u_{-p} + \ldots$$

Cette formule peut être écrite symboliquement

$$u_n = (1 - \Delta u^{-1})^{-n},$$

et pourra se démontrer d'une manière tout à fait analogue à la formule (A). Cette formule démontrée, on en déduira la formule (D) de la même manière qu'on a déduit la formule (C) de la formule (A).

IV. Etant donné le polynôme $F(x)$, proposons-nous d'exprimer les dérivées

$$F'(x_0),\ F''(x_0), \ldots,\ F^{(m)}(x_0)$$

en fonction des différences

$$\Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2}, \ldots,\ \Delta^m u_{-m}.$$

Nous avons

$$\text{(M)} \qquad F(x + x_0) = F(x_0) + x F'(x_0) + \frac{x^2}{1.2} F''(x_0) + \ldots$$

Nous avons aussi

$$F(x) = F(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\Delta u_{-1}$$
$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + \ldots.$$

Soit changé dans cette formule x en $x + x_0$, il vient

$$F(x + x_0) = F(x_0) + \frac{x}{h}\Delta u_{-1} + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2}$$
$$+ \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} + 1\right)\left(\frac{x}{h} + 2\right)\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + \ldots$$

Ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x, nous avons

$$
(\mathrm{N})\quad \left\{
\begin{aligned}
& \mathrm{F}(x + x_0) = \mathrm{F}(x_0) \\
& + \frac{x}{h}\left(\frac{\Delta u_{-1}}{1} + \frac{\Delta^2 u_{-2}}{2} + \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3} + \ldots + \frac{\Delta^m u_{-m}}{m}\right) \\
& + \frac{x^2}{h^2}\left[\begin{aligned} & \frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + (1+2)\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} \\ & + (1.2 + 1.3 + 2.3)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} + \ldots \end{aligned}\right] \\
& + \frac{x^3}{h^3}\left[\begin{aligned} & \frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (1+2+3)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} \\ & + \left(\begin{aligned} & 1.2+1.3+1.4 \\ & +2.3+2.4+3.4 \end{aligned}\right)\frac{\Delta^5 u_{-5}}{1.2.3.4.5} + \ldots \end{aligned}\right]. \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

En égalant les coefficients des termes de même degré dans les expressions (M) et (N) de $\mathrm{F}(x + x_0)$, il vient

$$h\,\mathrm{F}'(x_0) = \frac{\Delta u_{-1}}{1} + \frac{\Delta^2 u_{-2}}{2} + \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3} + \ldots + \frac{\Delta^m u_{-m}}{m},$$

$$\frac{h^2\,\mathrm{F}''(x_0)}{1.2} = \frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + (1+2)\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3}$$
$$+ (1.2 + 1.3 + 2.3)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} + \ldots,$$

$$\frac{h^3\,\mathrm{F}'''(x_0)}{1.2.3} = \frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (1+2+3)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4}$$
$$+ \left(\begin{aligned} & 1.2+1.3+1.4 \\ & +2.3+2.4+3.4 \end{aligned}\right)\frac{\Delta^5 u_{-5}}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous pouvons maintenant procéder à la démonstration des théorèmes qui font l'objet de ce Mémoire.

PROPOSITION I.

Théorème.

La suite

$$u_0,\ \Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2},\ldots,\ \Delta^m u_{-m}$$

a au moins autant de variations que la suite

$$\mathrm{F}(x_0),\ \mathrm{F}'(x_0),\ \mathrm{F}''(x_0),\ldots,\ \mathrm{F}^{(m)}(x_0).$$

Si le nombre des variations de la première suite est plus grand que le nombre des variations de la deuxième, la différence de ces deux nombres est un nombre pair.

Nous commencerons par établir deux lemmes.

Lemme I. — A, B, C,..., T, U étant des nombres quelconques positifs ou négatifs, la suite

$$\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ldots,\ \mathrm{T},\ \mathrm{U}$$

a au moins autant de variations que la suite

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\ldots+\mathrm{T}+\mathrm{U},\quad \mathrm{B}+\mathrm{C}+\ldots+\mathrm{U},\ldots,\ \mathrm{T}+\mathrm{U},\ \mathrm{U},$$

que nous appellerons *suite dérivée de la première.*

En effet, posons

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\ldots+\mathrm{T}+\mathrm{U}+\alpha=0.$$

Le polynôme

$$(1)\qquad \mathrm{U}x^m+\mathrm{T}x^{m-1}+\ldots+\mathrm{B}x^2+\mathrm{A}x+\alpha$$

sera divisible par $x-1$, et le quotient de ce polynôme par $x-1$ sera

$$(2)\qquad \mathrm{U}x^{m-1}+\left.\begin{matrix}\mathrm{U}\\+\mathrm{T}\end{matrix}\right|x^{m-2}+\ldots+\left.\begin{matrix}\mathrm{U}\\+\mathrm{T}\\\ldots\\+\mathrm{B}\end{matrix}\right|x+\begin{matrix}\mathrm{U}\\+\mathrm{T}\\\ldots\\+\mathrm{B}\\+\mathrm{A}\end{matrix}$$

Si l'on multiplie le polynôme (2) par $x - 1$, on aura le polynôme (1); donc le polynôme (1) a au moins une variation de plus que le polynôme (2). Donc dans le cas le plus défavorable où α serait de signe contraire à A, la suite

$$A,\ B,\ C, \ldots,\ U$$

aura au moins autant de variations que sa suite dérivée.

Lemme II. — Soit la suite composée de m termes

$$(a) \qquad A,\ B,\ C, \ldots,\ I,\ K,\ \ldots,\ T,\ U$$

et sa suite dérivée

$$(b) \qquad \begin{cases} A + B + \ldots + U, \ \ldots,\ I + K + \ldots + U, \\ K + L + \ldots + U, \ \ldots,\ T + U,\ U; \end{cases}$$

je pose la suite

$$(c) \qquad A,\ B, \ldots,\ I,\ K + L + \ldots + U, \ldots,\ T + U,\ U,$$

formée des n premiers termes de la suite (a) et des $m - n$ derniers termes de la suite (b), et je dis que la suite (a) a au moins autant de variations que la suite (c).

En effet, soit s le nombre des variations de la suite

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,\ I,\ K,$$

et t le nombre des variations de la suite

$$K, \ldots,\ T,\ U;$$

la suite (a) aura $s + t$ variations. D'après le lemme I, la suite

$$K + L + \ldots + U,\ \ldots,\ T + U,\ U$$

n'a pas plus de t variations. Alors considérons les deux hypothèses:

1°. Si les quantités K et $K + L + \ldots + U$ sont de même signe, la suite

$$A,\ B,\ C,\ldots,\ I,\ K$$

a le même nombre de variations que la suite

$$A,\ B,\ C,\ldots,\ I,\ K+T+\ldots+U;$$

donc la suite (c) n'a pas plus de $s+t$ variations.

2°. Si K et $K+L+\ldots+U$ sont de signe contraire, la suite

$$K+L+\ldots+U,\ldots,\ L+U,\ U$$

ne peut pas avoir t variations, elle en a au plus $t-1$, la suite

$$A,\ B,\ldots,\ I,\ K+L+\ldots+U$$

aura $s-1$ ou $s+1$ variations. Donc la suite (c) n'a pas plus de $(s+1)+(t-1)$ variations ou $s+t$ variations, et le lemme est démontré.

Ces deux lemmes établis, démontrons la proposition qui nous occupe sur un polynôme d'un degré déterminé, le quatrième par exemple; il sera facile de reconnaître que la démonstration s'étend à un polynôme d'un degré quelconque.

Multiplions $\Delta u_{-1}, \Delta^2 u_{-2}, \Delta^3 u_{-3}, \Delta^4 u_{-4}$ par les nombres $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ et écrivons la suite

$$(\mathrm{A}) \qquad u_0,\ \frac{\Delta u_{-1}}{1},\ \frac{\Delta^2 u_{-2}}{2},\ \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3},\ \frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}.$$

Formons les quatre derniers termes de la suite dérivée de la suite (A), et les plaçant sous les termes de même ordre de la suite (A), nous avons le tableau

$$\left|\begin{array}{l|l|l|l}
\dfrac{\Delta u_{-1}}{1} & \dfrac{\Delta^2 u_{-2}}{2} & \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{3} & \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{4} \\
\dfrac{\Delta u_{-1}}{1}-\dfrac{\Delta^2 u_{-2}}{2}+\dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{4} & \dfrac{\Delta^2 u_{-2}}{2}+\dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{4} & \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{4} & \dfrac{\Delta^4 u_{-5}}{4}
\end{array}\right.$$

Il est évident que la suite

$$(1) \qquad u_0,\quad \Delta u_{-1},\quad \Delta^2 u_{-2},\quad \Delta^3 u_{-3},\quad \Delta^4 u_{-4}$$

présente le même nombre de variations que la suite (A); donc, d'après le lemme II, la suite (1) a au moins autant de variations que la suite

$$u_0,\quad \frac{\Delta u_{-1}}{1}+\frac{\Delta^2 u_{-2}}{2}+\frac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\frac{\Delta^4 u_{-4}}{4},$$

$$\frac{\Delta^2 u_{-2}}{2}+\frac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\frac{\Delta^4 u_{-4}}{4},\quad \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\frac{\Delta^4 u_{-4}}{4},\quad \frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}.$$

Multiplions les trois derniers termes de cette suite respectivement par $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et remarquant que l'on a

$$\frac{\Delta u_{-1}}{1}+\frac{\Delta^2 u_{-2}}{2}+\frac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}=h\mathrm{F}'(x_0),$$

nous aurons cette autre suite

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{array}{l} u_0,\quad h\mathrm{F}'(x_0),\quad \dfrac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2}+\dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.3}+\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.4},\\[2ex] \qquad\qquad \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{2.3}+\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.4},\quad \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{3.4}.\end{array}\right.$$

Formons les trois derniers termes de la suite dérivée de la suite (B), et les plaçant sous les termes de même ordre de la suite (B), nous aurons le tableau

$$\begin{array}{l|l|l|l} u_0\ \ h\mathrm{F}'(x_0) & \dfrac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2}+\dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.3}+\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.4} & \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{2.3}+\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.4} & \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{3.4} \\ & \dfrac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2}+(2+1)\dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3}+(2.3+1.3+1.2)\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} & \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{2.3}+(3+2)\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.3.4} & \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{3.4} \end{array}$$

Remarquons que l'on a

$$\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2}+(2+1)\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3}+(2.3+1.3+1.2)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4}$$
$$=\frac{h^2\mathrm{F}''(x_0)}{1.2};$$

Donc, d'après le lemme II, la suite (B) et à fortiori la suite (1) ont au moins autant de variations que la suite

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{array}{lll} u_0, & \dfrac{h\,\mathrm{F}'(x_0)}{1}, & \dfrac{h^2\,\mathrm{F}''(x_0)}{1.2}, \\[2ex] \dfrac{\Delta^3 u_{-1}}{2.3} + (3+2)\dfrac{\Delta^4 u_{-1}}{2.3.4}, & & \dfrac{\Delta^4 u_{-1}}{3.4}. \end{array}\right.$$

Multiplions les deux derniers termes de la suite (C) par $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, et agissant comme précédemment, nous formons le tableau

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} u_0 & h\,\mathrm{F}'(x_0) & \dfrac{h^2\,\mathrm{F}''(x_0)}{1.2} & \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (3+2)\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} & \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.3.4} \\[2ex] & & & \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (3+2+1)\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} & \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.3.4} \end{array}$$

Or on a

$$\frac{\Delta^3 u_{-1}}{1.2.3} + (3+2+1)\frac{\Delta^4 u_{-1}}{1.2.3.4} = \frac{h^5\,\mathrm{F}'''(x_0)}{1.2.3},$$

$$\frac{\Delta^4 u_{-1}}{1.2.3.4} = \frac{h^4\,\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(x_0)}{1.2.3.4}.$$

Donc la suite (C) et à fortiori la suite (B) et la suite (1) ont au moins autant de variations que la suite

$$u_0,\quad \frac{h\,\mathrm{F}'(x_0)}{1},\quad \frac{h^2\,\mathrm{F}''(x_0)}{1.2},\quad \frac{h^3\,\mathrm{F}'''(x_0)}{1.2.3},\quad \frac{h^4\,\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(x_0)}{1.2.3.4}.$$

Donc enfin la suite

$$u_0,\quad \Delta u_{-1},\quad \Delta^2 u_{-2},\quad \Delta^3 u_{-3},\quad \Delta^4 u_{-4},$$

a au moins autant de variations que la suite

$$\mathrm{F}(x_0),\quad \mathrm{F}'(x_0),\quad \mathrm{F}''(x_0),\quad \mathrm{F}'''(x_0),\quad \mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(x_0).$$

De plus, si le nombre de variations de la première suite est plus grand que le nombre de variations de la deuxième, la différence de ces deux nombres est un nombre pair. Car ces deux suites commencent et finissent par le même signe.

PROPOSITION II.

Théorème.

L'équation

$$F(x) = 0$$

n'a pas plus de racines plus grandes que x_0, que la suite

$$u_0, \ \Delta u_{-1}, \ \Delta^2 u_{-2}, \ldots, \ \Delta^m u_{-m}$$

n'a de variations. Si ce nombre de variations est plus grand que ce nombre de racines, leur différence est un nombre pair.

Soient ν le nombre des variations de la suite

$$u_0, \ \Delta u_{-1}, \ldots, \ \Delta^m u_{-m},$$

ν' celui des variations de la suite

$$F(x_0), \ F'(x_0), \ldots, \ F^{(m)}(x_0),$$

r le nombre des racines plus grandes que x_0. On aura

$$F(x + x_0) = F(x_0) + x F'(x_0) + \frac{x^2}{1.2} F''(x_0) + \ldots.$$

D'après le théorème de Descartes,

$$F(x + x_0) = 0$$

n'a pas plus de racines positives, que la suite

$$F(x_0), \ F'(x_0), \ldots, \ F^{(m)}(x_0)$$

n'a de variations; donc

$$F(x) = 0$$

n'a pas plus de racines plus grandes que x_0, que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ldots,\ F^{(m)}(x_0)$$

n'a de variations, et, d'après le même théorème, $\nu' - r$ est un nombre pair. D'après le théorème précédent, ν n'est pas plus petit que ν'; donc l'équation

$$F(x) = 0$$

n'a pas plus de racines plus grandes que x_0, que la suite

$$u_0,\ \Delta u_{-1},\ \ldots,\ \Delta^m u_{-m}$$

n'a de variations. De plus, si ce nombre de variations est plus grand que ce nombre de racines, leur différence est un nombre pair. Car nous venons de remarquer que $\nu' - r$ est un nombre pair; d'après le théorème précédent $\nu - \nu'$ est un nombre pair, donc la somme de ces deux nombres $\nu - r$ est un nombre pair.

Proposition III.

Théorème.

La suite

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \ldots,\ \Delta^m u_0$$

a au moins autant de permanences que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ \ldots,\ F^{(m)}(x_0).$$

En effet, posons

$$F(x) = f(x - x_0),$$

nous aurons

$$f(x - x_0) = u_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\Delta u_0$$
$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots$$

Changeons $x - x_0$ en $-x + x_0$, nous aurons

$$f(-x + x_0) = u_0 - \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\Delta u_0$$
$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} - \ldots.$$

Soient $\Delta' u_{-1}$, $\Delta'^2 u_{-2}, \ldots, \Delta'^m u_{-m}$ les différences de la fonction $f(-x + x_0)$ analogues aux différences Δu_{-1}, $\Delta^2 u_{-2}, \ldots, \Delta^m u_{-m}$ de la fonction $f(x - x_0)$, il viendra

$$f(-x + x_0) = u_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\Delta' u_{-1}$$
$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} + 1\right)\frac{\Delta'^2 u_{-2}}{1.2} + \ldots.$$

En comparant ces deux expressions de $f(-x + x_0)$, j'aurai

$$\Delta' u_{-1} = -\Delta u_0, \quad \Delta'^2 u_{-2} = \Delta^2 u_0, \quad \Delta'^3 u_{-3} = -\Delta^3 u_0, \ldots.$$

Or la suite

$$u_0, \ \Delta' u_{-1}, \ \Delta'^2 u_{-2}, \ \Delta'^3 u_{-3}, \ldots$$

a au moins autant de variations que la suite

$$f(0), \ -f'(0), \ f''(0), \ -f'''(0), \ldots, \ \pm f^{(m)}(0).$$

Donc la suite

$$(a) \qquad u_0, \ -\Delta u_0, \ \Delta^2 u_0, \ -\Delta^3 u_0, \ldots \pm \Delta^m u_0$$

a au moins autant de variations que la suite

$$(b) \qquad F(x_0), \ -F'(x_0), \ F''(x_0), \ldots, \ \pm F^{(m)}(x_0).$$

Alors, si aucun terme n'est nul ni dans la suite (a) ni dans la suite (b), il est clair que la suite

$$u_0, \ \Delta u_0, \ \Delta^2 u_0, \ldots, \ \Delta^m u_0$$

a au moins autant de permanences que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ F''(x_0),\ \ldots,\ F^{(m)}(x_0).$$

Si quelques termes étaient nuls, on remplacerait dans les suites (a) et (b) ces termes nuls par des signes, de manière à avoir le plus de permanences possibles, ce qui ne changerait pas le nombre de variations de ces deux suites, et alors il est clair que la suite

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \ldots,\ \Delta^m u_0$$

a au moins autant de permanences que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ \ldots,\ F^{(m)}(x_0),$$

après que l'on a remplacé les termes nuls par des signes de manière à avoir le plus de variations possibles.

Proposition IV.

Théorème.

L'équation

$$F(x) = 0$$

n'a pas plus de racines plus petites que x_0, que la suite

$$u_0,\ -\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ -\Delta^3 u_0,\ \ldots$$

n'a de variations. Si le nombre des variations est plus grand que ce nombre de racines, leur différence est un nombre pair.

Considérons comme dans le théorème précédent l'équation

$$f(-x + x_0) = 0.$$

D'après la proposition II, l'équation

$$f(-x + x_0) = 0$$

n'a pas plus de racines plus grandes que x_0, que la suite

$$u_0,\quad \Delta' u_{-1},\quad \Delta'^2 u_{-2}, \ldots$$

n'a de variations. Si ce nombre de variations est plus grand que ce nombre de racines, leur différence est un nombre pair.

Or il est clair que l'équation

$$f(-x + x_0) = 0$$

a autant de racines plus grandes que x_0, que l'équation

$$f(x - x_0) = 0$$

ou

$$F(x) = 0$$

a de racines plus petites que x_0, et la suite

$$u_0,\quad \Delta' u_{-1},\quad \Delta'^2 u_{-2}, \ldots$$

n'est autre que la suite

$$u_0,\quad -\Delta u_0,\quad \Delta^2 u_0,\quad -\Delta^3 u_0, \ldots$$

Donc la proposition est démontrée.

PROPOSITION V.

Théorème de Budan.

Etant donnée une équation

$$F(x) = 0$$

de degré m, si a est plus grand que b, la différence entre le nombre des variations des deux suites

$$F(a),\ F'(a),\ F''(a), \ldots,\ F^{(m)}(a),$$
$$F(b),\ F'(b),\ F''(b), \ldots,\ F^{(m)}(b),$$

n'est pas plus petite que le nombre des racines comprises entre a et b. Si le premier nombre est plus grand que le second, leur différence est un nombre pair.

Soit θ la différence $b - a$, posons

$$\theta = nh,$$

n étant un nombre entier; afin de ne pas contrarier nos notations, posons aussi

$$a = x_0,$$

et substituons dans $\mathrm{F}(x)$ les nombres croissant en progression par différence

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \ldots,$$
$$x_n = b = x_0 + nh.$$

Supposons h assez petit pour que deux racines consécutives de l'équation

$$\mathrm{F}(x) = 0$$

diffèrent de plus de h; il y aura au plus une racine comprise entre deux termes consécutifs quelconques de cette progression par différence.

Formons ensuite les différences premières, deuxièmes, troisièmes, etc., et disposons-les ainsi :

x_0	u_0	Δu_{-1}	$\Delta^2 u_{-2}$	......	$\Delta^{m-1} u_{-(m-1)}$	$\Delta^m u_{-m}$
x_1	u_1	Δu_0	$\Delta^2 u_{-1}$	......	$\Delta^{m-1} u_{-(m-2)}$	$\Delta^m u_{-(m-1)}$
....	....	.....	......	......	....	....
x_p	u_p	Δu_{p-1}	$\Delta^2 u_{p-2}$	......	$\Delta^{m-1} u_{p-m+1}$	$\Delta^m u_{p-m}$
x_{p+1}	u_{p+1}	Δu_p	$\Delta^2 u_{p-1}$	......	$\Delta^{m-1} u_{p-m+2}$	$\Delta^m u_{p-m+1}$
....	....	....	......	......	....	....
x_n	u_n	Δu_{n-1}	$\Delta^2 u_{n-2}$	......	$\Delta^{m-1} u_{n-m+1}$	$\Delta^m u_{n-m}$

J'appellerai suite (x_0) l'ensemble des termes formé par la première ligne horizontale, suite (x_1) celui des termes formé par la deuxième, et ainsi de suite.

Il est facile de reconnaître que chacune de ces suites est la suite dérivée de la précédente; par conséquent (proposition I, lemme I) la suite (x_{p+1}) a au plus autant de variations que la suite (x_p). Désignons par ν_p le nombre des variations de la suite (x_p) et par ν_{p+1} celui de la suite (x_{p+1}), nous aurons

$$v_p - v_{p+1} \geqq 0.$$

S'il y avait une racine entre x_p et x_{p+1}, u_p et u_{p+1} seraient de signe contraire: donc la suite (x_p) et la suite (x_{p+1}), commençant par des signes contraires et finissant par le même signe, on ne pourrait avoir

$$v_p - v_{p+1} = 0,$$

donc on aurait

$$v_p - v_{p+1} \geqq 1.$$

Soit μ le nombre des racines comprises entre a et b et supposons que la première soit comprise entre x_k et x_{k+1}, la deuxième entre x_r et $x_{r+1}, \ldots$, la μ^{ieme} entre x_t et x_{t+1}; nous aurons

$$v_0 - v_1 \geqq 0, \quad v_1 - v_2 \geqq 0, \ldots, \quad v_k - v_{k+1} \geqq 1, \ldots,$$
$$v_t - v_{t+1} \geqq 1, \ldots, \quad v_{n-1} - v_n \geqq 0.$$

En ajoutant ces égalités et inégalités membre à membre, nous aurons

$$v_0 - v_n \geqq \mu.$$

Or nous avons

$$\Delta u_{p-1} = \mathrm{F}(x_p) - \mathrm{F}(x_p - h)$$

$$= h\mathrm{F}'(x_p) - \frac{h^2}{1.2}\mathrm{F}'(x_p) + \ldots \pm \varphi(x_p)$$

$$\Delta\, u_{p-2} = \varphi(x_p) - \varphi(x_p - h)$$

$$= h\varphi'(x_p) - \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x_p) + \ldots = h^2 F''(x_p) - \ldots = \psi(x_p),$$

. . . .

Nous pouvons écrire ainsi les valeurs de ces différences :

$$\Delta\, u_{p-1} = h\,[F'(x_p) + h\rho],$$
$$\Delta^2 u_{p-2} = h^2[F''(x_p) + h\sigma],$$
$$\Delta^3 u_{p-3} = h^3[F'''(x_p) + h\tau],$$
. . . .

Donc si nous supposons h suffisamment petit, Δu_{p-1}, $\Delta^2 u_{p-2},\ldots,\ \Delta^m u_{p-m}$ seront de même signe que $F'(x_p)$, $F''(x_p),\ldots,\ F^{(m)}(x_p)$. Donc aussi, en supposant h suffisamment petit, ν_0 sera le nombre de variations de la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ldots,\ F^{(m)}(x_0),$$

et ν_n le nombre des variations de la suite

$$F(x_n),\ F'(x_n),\ \ldots,\ F^{(m)}(x_n).$$

Donc enfin la différence entre le nombre des variations des deux suites

(1) $\qquad F(a),\ F'(a),\ F''(a),\ldots,\ F^{(m)}(a),$

(2) $\qquad F(b),\ F'(b),\ F''(b),\ldots,\ F^{(m)}(b).$

n'est pas plus petite que le nombre des racines comprises entre a et b.

De plus, si le nombre des variations de la première suite est plus grand que le nombre des variations de la deuxième, la différence de ces deux nombres est un nombre pair.

En effet, remarquons que

$$F^{(m)}(a) = F^{(m)}(b).$$

D'après cela, si le nombre μ des racines comprises entre a et b est pair, $F(a)$ et $F(b)$ seront de même signe; et les suites (1) et (2) commenceront et finiront par le même signe; donc $\nu_0 - \nu_n$ est pair, donc enfin $\nu_0 - \nu_n - \mu$ est un nombre pair.

On voit de même que si μ est impair, $\nu_0 - \nu_n$ est un nombre impair, et $\nu_0 - \nu_n - \mu$ est un nombre pair.

Dans la démonstration précédente, on n'a supposé nulle aucune dérivée de $F(x)$ pour $x = a$ et $x = b$. Supposons maintenant que dans la suite

$$F(a),\ F'(a),\ldots,\ F^{(n-1)}(a),\ F^{(n)}(a),\ldots,$$
$$F^{(n-p)}(a),\ F^{(n-p+1)}(a),\ldots,\ F^{(m)}(a),$$

tous les termes compris entre $F^{(n-1)}(a)$ et $F^{(n-p+1)}(a)$ s'annulent. Au lieu de substituer a dans la suite

$$F(x),\ F'(x),\ldots,\ F^{(n-1)}(x),\ F^{(n)}(x),\ldots,$$
$$F^{(n-p)}(x),\ F^{(n-p+1)}(x),\ldots,\ F^{(m)}(x),$$

on substituera $a - h$ et $a + h$, et si l'on suppose h suffisamment petit, les signes de cette suite ne pourront être altérés dans le passage de $x = a - h$ à $x = a + h$ que dans la partie qui se trouve entre $F^{(n-1)}(x)$ et $F^{(n-p+1)}(x)$. Il suffira donc de comparer les signes des deux suites

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} F^{(n-1)}(a-h),\ F^{(n)}(a-h),\ F^{(n+1)}(a-h),\ldots,\\ \qquad\qquad F^{(n-p+1)}(a-h), \end{array}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} F^{(n-1)}(a+h),\ F^{(n)}(a+h),\ F^{(n+1)}(a+h),\ldots,\\ \qquad\qquad F^{(n-p+1)}(a+h). \end{array}\right.$$

En développant ces fonctions, il sera facile de reconnaître que $F^{(n)}(a+h)$, $F^{(n+1)}(a+h)$,..., $F^{(n-p)}(a+h)$ sont tous de même signe que $F^{(n-p+1)}(a)$ si h est suffisamment petit. On reconnaîtra aussi que si h est suffisamment petit, $F^{(n-p)}(a-h)$ est de signe contraire à $F^{(n-p+1)}(a)$,

$F^{(n-p-1)}(a-h)$ est de même signe, $F^{(n-p-2)}(a-h)$ de signe contraire, et ainsi de suite.

Nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce cas particulier; nous nous bornerons à dire que si la suite (3) a u variations de plus que la suite (4), l'équation

$$F(x)=0$$

a u racines imaginaires.

Proposition VI.

Théorème.

Supposons que les deux suites

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} u_0, & \Delta u_{-1}, & \Delta^2 u_{-2}, \ldots, & \Delta^m u_{-m}, \\ u_0, & \Delta u_0, & \Delta^2 u_0, \ldots, & \Delta^m u_0, \end{cases}$$

présentent les mêmes signes ou même seulement le même nombre de variations; je dis que ce nombre de variations est le même que celui de la suite

$$(a)\qquad F(x_0),\ F'(x_0),\ldots,\ F^{(m)}(x_0).$$

Soient p le nombre des variations, q le nombre des permanences de chaque suite (α). Soient p' le nombre des variations, q' le nombre des permanences de la suite (a). (Proposition I), p n'est pas plus petit que p'; (proposition III), q n'est pas plus petit que q'; donc, puisque

$$p+q=p'+q',$$

on a

$$p=p' \quad \text{et} \quad q=q'.$$

Corollaire. — En se rappelant la proposition V, on voit que si h est suffisamment petit pour que les deux suites

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} u_0, & \Delta u_{-1}, & \Delta^2 u_{-2}, \ldots, & \Delta^m u_{-m}, \\ u_0, & \Delta u_0, & \Delta^2 u_0, \ldots, & \Delta^m u_0, \end{cases}$$

présentent le même nombre de variations, et qu'il en soit de même pour les deux suites

$$(\beta)\quad \left\{\begin{array}{lllll} u_n, & \Delta u_{n-1}, & \Delta^2 u_{n-2}, \ldots, & \Delta^m u_{n-m}, \\ u_n, & \Delta u_n, & \Delta^2 u_n, \ldots, & \Delta^m u_n, \end{array}\right.$$

la différence entre le nombre des variations des suites (α) et des suites (β) n'est pas plus petite que le nombre des racines de $F(x) = 0$ comprises entre x_0 et x_n. Si la différence entre le nombre des variations des suites (α) et des suites (β) est plus grande que le nombre des racines comprises entre x_0 et x_n, la différence de ces deux nombres est un nombre pair.