

ESPRIT JOUFFRET

**Sur les surfaces du second ordre**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 15  
(1856), p. 440-448

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1856\\_1\\_15\\_\\_440\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__440_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE,

PAR M. ESPRIT JOUFFRET,

Élève du Lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie).

---

### 1. Posons

$$A = \sum a_j x_j, \quad B = \sum b_j x_j,$$

où  $\lambda$  doit prendre successivement les quatre valeurs 1, 2, 3, 4; A et B seront des fonctions linéaires homogènes à quatre variables  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Posons aussi

$$u = \sum M_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$$

où encore  $\lambda$  et  $\mu$  doivent prendre chacun successivement et de toutes les manières possibles les valeurs 1, 2, 3, 4 avec la condition  $\lambda\mu = \mu\lambda$ ;  $u$  sera la fonction générale homogène du second degré des mêmes variables  $x$ .

Nous adopterons pour désigner les diverses dérivées de  $u$  (et des autres fonctions que nous aurons à considérer) la notation de M. Hesse, savoir

$$\frac{du}{dx_j} = u_j, \quad \frac{du_\lambda}{dx_\mu} = u_{\lambda\mu}.$$

Si nous considérons les rapports  $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$  comme les

---

(\*) M. Kummer prouve que le dernier terme de l'équation au carré des différences de l'équation aux axes principaux est la somme de sept carrés; lesquels, pris avec le signe opposé, sont sous le radical des racines de la *réduite*, lesquelles étant imaginaires, les trois racines de la proposée sont réelles (*Crelle*, t. XXVI, p. 268; 1843). Jm.

coordonnées d'un point, les équations

$$A = 0, \quad B = 0$$

représenteront des plans, et l'équation

$$u = 0$$

sera l'équation générale des surfaces du second ordre. Pour abrégér le discours, nous dénommerons ces plans et les surfaces par les lettres  $A$ ,  $B$ ,  $u$ .

2. Les deux plans  $A$  et  $B$  coupent la surface  $u$  suivant deux courbes (réelles ou imaginaires) par lesquelles nous pouvons faire passer une infinité de surfaces du second degré dont l'équation générale est

$$u + mAB = v = 0.$$

On peut déterminer  $m$  de manière que la surface  $v$  soit un cône. Pour cela, il faut égaler à zéro le déterminant  $\Delta$  de la fonction  $v$ . On connaît la composition de ce déterminant qui contient vingt-quatre termes dont chacun est le produit de quatre facteurs tels que

$$v_{\lambda\mu} = u_{\lambda\mu} + m(a_{\mu} b_{\lambda} + b_{\mu} a_{\lambda}) \quad (*) :$$

l'équation

$$\Delta = 0$$

paraît donc être du quatrième degré en  $m$ , et c'est en effet ce qui a lieu dans le cas général où l'on considère deux surfaces quelconques du second degré. Mais ici cette équation se réduit au second degré.

En effet, la fonction  $\Delta$  jouit de cette propriété, que si l'on permute les deux derniers chiffres des indices entre deux facteurs de l'un de ses termes et qu'on change le signe, on obtient un autre terme de  $\Delta$ . Par exemple, le terme  $v_{11}$ ,  $v_{22}$ ,  $v_{33}$ ,  $v_{44}$  donne naissance aux trois sui-

(\*) Voir Bertrand, *Algèbre*, 2<sup>e</sup> édit., p. 483.

vants

$$- \nu_{11} \nu_{22} \nu_{34} \nu_{43}, \quad + \nu_{12} \nu_{21} \nu_{34} \nu_{43}, \quad - \nu_{12} \nu_{22} \nu_{33} \nu_{44}$$

et l'ensemble de ces quatre termes peut s'écrire

$$(\alpha) \quad (\nu_{33} \nu_{44} - \nu_{34} \nu_{43}) (\nu_{11} \nu_{22} - \nu_{12} \nu_{21}).$$

La fonction  $\Delta$  est donc la somme de six produits tels que  $(\alpha)$ ; or il est facile de reconnaître en remplaçant les  $\nu$  par leurs valeurs que dans le premier de ces facteurs le terme en  $m^2$  fourni par  $\nu_{33} \nu_{44}$  est détruit par celui que fournit  $\nu_{34} \nu_{43}$ , et de même dans le second facteur.

La fonction  $\Delta$  est donc du second degré en  $m$ , de sorte qu'il y a seulement deux cônes (proprement dits) enveloppant les deux courbes A et B (\*).

(\*) L'équation

$$\Delta = 0$$

étant généralement du quatrième degré, on peut dire que, dans le cas actuel, deux racines deviennent infinies. Pour ces valeurs infinies de  $m$ , la fonction  $\nu$  se réduit à AB; ainsi deux des quatre cônes qui enveloppent la courbe d'intersection de deux surfaces du second degré dans le cas général se réduisent; lorsque cette courbe se compose de deux coniques, à un seul qui est le système de deux plans dans lesquels se trouvent les deux coniques et dont le sommet est indéterminé sur la droite d'intersection de ces plans.

Le théorème général est dû à M. Poncelet (*Propriétés projectives*, page 395). Plucker (*System der Geometrie des Raumes*, § 14) le démontre de la manière suivante qui permet de voir très-clairement la réduction de deux cônes à un système de plans dans le cas que nous considérons :

La détermination simultanée de deux surfaces du second degré dépend de dix-huit constantes. Ce nombre se trouvant dans les équations

$$(1) \quad \begin{cases} \pi p^2 + \chi q^2 + \rho r^2 + \sigma s^2 = 0, \\ \pi' p^2 + \chi' q^2 + \rho' r^2 + \sigma' s^2 = 0, \end{cases}$$

où  $p, q, r, s$  sont des fonctions linéaires des coordonnées courantes et  $\pi, \chi$ , etc., des constantes, il est clair que les équations représentent deux surfaces générales du second degré. Éliminant successivement l'une des quatre fonctions  $p, q, r, s$  entre ces équations, nous avons

$$(2) \quad \begin{cases} [\pi' \chi] q^2 + [\pi' \rho] r^2 + [\pi' \sigma] s^2 = 0, \\ [\chi' \pi] p^2 + [\chi' \rho] r^2 + [\chi' \sigma] s^2 = 0, \\ [\rho' \pi] p^2 + [\rho' \chi] q^2 + [\rho' \sigma] s^2 = 0, \\ [\sigma' \pi] p^2 + [\sigma' \chi] q^2 + [\sigma' \rho] r^2 = 0. \end{cases}$$

3. Cela posé, je me propose de démontrer (analytiquement) les théorèmes suivants :

1°. Si la ligne suivant laquelle se coupent les deux plans A et B tourne dans un plan fixe, la ligne joignant les sommets de ces deux cônes tourne autour d'un point fixe.

2°. Si la première ligne est fixe, la seconde est aussi fixe.

3°. Si la première ligne tourne autour d'un point fixe, la seconde tourne dans un plan fixe.

4. Les coordonnées du sommet (ou *centre*) du cône qui correspond à la racine  $m'$  vérifient les équations

$$(1) \quad \begin{cases} v_1 = u_1 + m' (A b_1 + B a_1) = 0, \\ v_2 = u_2 + m' (A b_2 + B a_2) = 0, \\ v_3 = u_3 + m' (A b_3 + B a_3) = 0, \\ v_4 = u_4 + m' (A b_4 + B a_4) = 0, \end{cases}$$

Chacune de ces équations représente un cône qui passe par la courbe d'intersection des surfaces (1). Ces quatre cônes ont pour sommets les quatre sommets du tétraèdre formé par les plans

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0.$$

Supposons

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\rho}{\rho'} = \lambda,$$

les équations (1) deviennent

$$\pi p^2 + \chi q^2 + \rho (r^2 + \lambda s^2) = 0,$$

$$\pi' p^2 + \chi' q^2 + \rho' (r^2 + \lambda s^2) = 0,$$

et les deux surfaces se coupent suivant deux coniques situées dans les plans représentés par l'équation

$$[\pi \rho'] p^2 + [\chi' \rho'] q^2 = 0.$$

Or les deux dernières équations (2) se réduisent à une seule qui est aussi

$$[\pi \rho'] p^2 + [\chi \rho'] q^2 = 0.$$

Ajoutons que chaque face du tétraèdre est le plan polaire du sommet opposé.

d'où nous déduisons

$$(2) \frac{u_1}{A b_1 + B a_1} = \frac{u_2}{A b_2 + B a_2} = \frac{u_3}{A b_3 + B a_3} = \frac{u_4}{A b_4 + B a_4},$$

équations qui étant indépendantes de  $m'$  sont vérifiées par tous les sommets. Ce sont les équations que nous emploierons pour démontrer nos théorèmes

5. Pour démontrer le premier théorème, nous avons besoin des équations de la droite qui joint les sommets des deux cônes. Ces équations sont faciles à obtenir. En effet, les relations (2) donnent

$$\frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{A (b_1 a_2 - b_2 a_1)} = \frac{u_2 a_3 - u_3 a_2}{A (b_2 a_3 - b_3 a_2)} = \frac{u_3 a_4 - u_4 a_3}{A (b_3 a_4 - b_4 a_3)}.$$

En supprimant le facteur  $\frac{1}{A}$ , nous avons un système linéaire qui doit être vérifié par chacun des deux sommets et qui représente par conséquent la droite joignant ces deux sommets. Les équations à cette droite peuvent s'écrire d'une manière plus courte

$$(3) \quad \frac{[u_1 a_2]}{[b_1 a_2]} = \frac{[u_2 a_3]}{[b_2 a_3]} = \frac{[u_3 a_4]}{[b_3 a_4]}$$

en désignant comme d'ordinaire les binômes alternés par des crochets.

Cela posé, soit

$$P = \sum p_\lambda x_\lambda = 0$$

un plan fixe, et posons

$$B = P + nA$$

c'est-à-dire

$$b_\lambda = p_\lambda + n a_\lambda;$$

ceci exprimera que les deux plans A et B se coupent sur

le plan fixe P. Substituant dans la première des fractions (3), nous avons

$$\frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{(p_1 + na_1) a_2 - (p_2 + na_2) a_1} = \frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{p_1 a_2 - p_2 a_1},$$

et comme chacune des fractions (3) se déduit de la précédente en augmentant les indices d'une unité, le système (3) deviendra

$$\frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{p_1 a_2 - p_2 a_1} = \frac{u_2 a_3 - u_3 a_2}{p_2 a_3 - p_3 a_2} = \frac{u_3 a_4 - u_4 a_3}{p_3 a_4 - p_4 a_3};$$

or il est évident que si nous posons

$$(4) \quad \frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \frac{u_3}{p_3} = \frac{u_4}{p_4},$$

équations qui déterminent un point fixe, ce système sera identiquement vérifié indépendamment des  $a$ . La droite (3) tournera donc autour de ce point fixe quand la droite AB tournera dans le plan P.

6. Soient

$$P = \sum p_\lambda x_\lambda = 0,$$

$$Q = \sum q_\lambda x_\lambda = 0$$

les équations d'une droite fixe. Posons

$$A = P + nQ,$$

$$B = P + n'Q$$

c'est-à-dire

$$a_\lambda = p_\lambda + nq_\lambda,$$

$$b_\lambda = p_\lambda + n'q_\lambda;$$

ce qui exprimera que les deux plans A et B passent par cette droite, et substituons dans les équations (2) (qui

sont maintenant préférables aux équations (3) en ce qu'elles ne contiennent pas les variables  $a$  et  $b$  à la fois au numérateur et au dénominateur); ces équations deviennent

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{(A+B)p_1 + (A n' + B n) q_1} &= \frac{u_2}{(A+B)p_2 + (A n' + B n) q_2} \\ &= \frac{u_3}{(A+B)p_3 + (A n' + B n) q_3} \\ &= \frac{u_4}{(A+B)p_4 + (A n' + B n) q_4} \\ &= \frac{u_1 q_2 - u_2 q_1}{(A+B)(p_1 q_2 - p_2 q_1)} \\ &= \frac{u_2 q_3 - u_3 q_2}{(A+B)(p_2 q_3 - p_3 q_2)} \\ &= \frac{u_3 q_4 - u_4 q_3}{(A+B)(p_3 q_4 - p_4 q_3)}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\frac{[u_1 q_2]}{[p_1 q_2]} = \frac{[u_2 q_3]}{[p_2 q_3]} = \frac{[u_3 q_4]}{[p_3 q_4]},$$

équations qui représentent une droite fixe.

Cette droite se nomme la polaire réciproque de la droite PQ.

7. Soient

$$P = \sum p_\lambda x_\lambda = 0,$$

$$Q = \sum q_\lambda x_\lambda = 0,$$

$$R = \sum r_\lambda x_\lambda = 0$$

les équations d'un point fixe. Posons

$$A = P + mQ + nR,$$

$$B = P + m'Q + n'R,$$



d'où

$$a_{\lambda} = p_{\lambda} + m q_{\lambda} + n r_{\lambda},$$

$$b_{\lambda} = p_{\lambda} + m' q_{\lambda} + n r_{\lambda}$$

pour exprimer que les plans A et B passent par ce point. Les équations (2) deviennent, en posant, pour abrégé l'écriture,

$$A m' + B m = M,$$

$$A n' + B n = N,$$

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{(A+B)p_1 + Mq_1 + Nr_1} &= \frac{u_2}{(A+B)p_2 + Mq_2 + Nr_2} \\ &= \frac{u_3}{(A+B)p_3 + Mq_3 + Nr_3} \\ &= \frac{u_4}{(A+B)p_4 + Mq_4 + Nr_4} \\ &= \frac{[u_1 q_2]}{(A+B)[p_1 q_2] + N[r_1 q_2]} \\ &= \frac{[u_2 q_3]}{(A+B)[p_2 q_3] + N[r_2 q_3]} \\ &= \frac{[u_3 q_4]}{(A+B)[p_3 q_4] + N[r_3 q_4]} \\ &= \frac{1}{A+B} \frac{[u_1 q_2][r_2 q_3] - [u_2 q_3][r_1 q_2]}{[p_1 q_2][r_2 q_3] - [p_2 q_3][r_1 q_2]} \\ &= \frac{1}{A+B} \frac{[u_2 q_3][r_3 q_4] - [u_3 q_4][r_2 q_3]}{[p_2 q_3][r_3 q_4] - [p_3 q_4][r_2 q_3]} \end{aligned}$$

Prenant les deux dernières fractions, nous avons

$$\frac{[u_1 q_2][r_2 q_3] - [u_2 q_3][r_1 q_2]}{[p_1 q_2][r_2 q_3] - [p_2 q_3][r_1 q_2]} = \frac{[u_2 q_3][r_3 q_4] - [u_3 q_4][r_2 q_3]}{[p_2 q_3][r_3 q_4] - [p_3 q_4][r_2 q_3]}$$

ou

$$\frac{[[u_1 q_2], [r_2 q_3]]}{[[p_1 q_2], [r_2 q_3]]} = \frac{[[u_2 q_3], [r_2 q_4]]}{[[p_2 q_3], [r_2 q_4]]},$$

équation qui représente un plan fixe.

Ce plan se nomme le plan polaire du point P, Q, R.

8. Si nous supposons que les deux plans A et A' coïncident, le cône enveloppant les deux courbes A et A' devient circonscrit à la surface et les deux derniers théorèmes donnent les suivants :

Si par une droite on mène différents plans et par les courbes d'intersection de ces plans avec la surface des cônes tangents à celle-ci, le lieu de ces cônes est une droite.

Si par un point fixe on mène différents plans et par les courbes d'intersection de ces plans avec la surface des cônes tangents à celle-ci, le lieu des sommets de ces cônes est un plan.

Ce sont les théorèmes connus sur les plans polaires, les seuls qu'on démontre ordinairement. Voir un article de M. Lenthéric (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome VII) où ils sont déduits de leurs réciproques.

*Remarque.* Le mode de démonstration que nous avons employé pour démontrer les théorèmes énoncés au n° 3 peut être employé identiquement de la même manière pour démontrer les propriétés correspondantes des polaires planes : car le système *plan* de deux droites correspond au cône de l'espace.

---

AVIS.

Des élèves nous ont adressé de bonnes solutions de questions proposées dans ce journal ; elles paraîtront en décembre et janvier prochain.

---