

TERQUEM

**Notes sur quelques questions du
programme officiel**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 449-454

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__449_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

IV.

Recherche des racines entières d'une équation à coefficients entiers.

Quand l'équation proposée est d'un degré assez élevé et que son dernier terme admet un grand nombre de diviseurs, les épreuves auxquelles on soumet ces diviseurs dans la recherche des racines entières peuvent conduire à faire de longs calculs pour arriver, le plus ordinairement, à cette conclusion : que l'équation n'a pas de racine entière; car, l'existence d'une racine entière, dans une équation prise au hasard est un fait exceptionnel. Que si, d'une part, la règle générale est que les racines cherchées n'existent pas, et que, d'autre part, tous les calculs que l'on fait pour les trouver ne servent absolument à rien dans la détermination des valeurs approchées des racines incommensurables qui existent, on en peut certainement conclure que la méthode suivie est défectueuse (*). Pour suppléer en partie à ce qui lui manque, il conviendrait, du moins, de la faire précéder de l'indication des principaux caractères auxquels on peut reconnaître qu'une équation n'admet pour racine aucun nombre entier. On trouve sur ce sujet de très-utiles renseignements dans les *Recherches arithmétiques* de Gauss; la première section contient une proposition générale qui, dans un grand

(*) La règle que l'on donne en arithmétique pour extraire la racine carrée d'un nombre n'a pas le même défaut, puisqu'elle fait connaître une valeur approchée de la racine cherchée, lorsque cette racine ne peut être obtenue exactement.

nombre de cas, donne des moyens très-simples de reconnaître que l'équation proposée n'admet aucune racine entière.

Nous allons d'abord établir cette proposition en n'employant que des termes usités dans l'enseignement élémentaire, et nous montrerons, par des exemples, de quelle utilité elle peut être.

1. Soient $f(x)$ ou $Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Px + Q$ un polynôme à coefficients entiers, et a, b deux nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs, dont la différence $(b - a)$ est exactement divisible par un certain nombre entier n : si l'on remplace successivement x par a et b dans $f(x)$, la différence $f(b) - f(a)$ des résultats de ces deux substitutions sera elle-même divisible par n (*).

En effet, les égalités

$$f(b) = Ab^m + Bb^{m-1} + \dots + Pb + Q,$$

$$f(a) = Aa^m + Ba^{m-1} + \dots + Pa + Q,$$

donnent

$$f(b) - f(a) = A(b^m - a^m) + B(b^{m-1} - a^{m-1}) + \dots + P(b - a).$$

Mais on sait que les différences $b^m - a^m, b^{m-1} - a^{m-1}$, etc., sont exactement divisibles par $b - a$; donc

$$f(b) - f(a)$$

est multiple de $b - a$, et, par conséquent, multiple de n .

2. Si, dans un polynôme $f(x)$ à coefficients entiers, on remplace successivement la variable x par deux

(*) Voici l'énoncé de Gauss : Soit X une fonction de l'indéterminée x de cette forme $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \dots$, A, B, C , etc., étant des nombres entiers quelconques, a, b, c des nombres entiers et positifs. Si l'on donne à x des valeurs congrues, suivant un certain module, les valeurs résultantes pour X le seront aussi. (Section I, n° 9.)

nombre entiers quelconques a, b , positifs ou négatifs, et qu'on divise les résultats $f(a), f(b)$ de ces substitutions par la différence $b - a$ des nombres substitués, les restes des deux divisions seront égaux entre eux.

Car, soient r et r' ces restes et q et q' les quotients correspondants, on aura

$$f(a) = (b - a)q + r,$$

$$f(b) = (b - a)q' + r',$$

d'où

$$f(b) - f(a) = (b - a)(q' - q) + r' - r.$$

Or, chacun des deux restes r, r' étant moindre que le diviseur correspondant $(b - a)$, la différence $r' - r$ de ces restes est nécessairement plus petite que $(b - a)$; d'ailleurs (n° 1), $f(b) - f(a)$ est divisible exactement par $(b - a)$, donc

$$r' - r = 0,$$

d'où

$$r' = r.$$

On démontrerait de même que les restes des divisions de $f(a), f(b)$ par un sous-multiple quelconque n de $b - a$ sont égaux entre eux.

3. Si l'on remplace successivement x dans le polynôme $f(x)$ à coefficients entiers par les nombres entiers consécutifs $a, a + 1, a + 2$, etc., positifs ou négatifs, et qu'on divise par un certain nombre entier n les résultats $f(a), f(a + 1), f(a + 2)$, etc., de ces substitutions, les restes des n premières divisions se reproduiront indéfiniment dans le même ordre.

En effet, nommons b le $(n + 1)^{\text{ième}}$ terme de la suite indéfinie $a, a + 1, a + 2$, etc., il en résultera

$$b - a = n.$$

Donc (n° 2) les restes des divisions de $f(b)$ et $f(a)$ par

n seront égaux. De même, les restes des divisions de $f(b+1)$ et $f(a+1)$ par n seront égaux puisque

$$(b+1) - (a+1) = b - a = n.$$

Et ainsi de suite. On voit donc que les n premiers restes se reproduiront indéfiniment dans le même ordre. Il est à observer qu'on trouverait aussi les mêmes restes, mais dans un ordre inverse, en divisant successivement par n les nombres $f(a-1)$, $f(a-2)$, $f(a-3)$, etc. Cela résulte évidemment de ce qui vient d'être démontré.

4. Si, dans le premier membre d'une équation

$$f(x) = 0,$$

à coefficients entiers, on remplace successivement l'inconnue x par n nombres entiers consécutifs a , $a+1$, $a+2$, ..., $a+(n-1)$, positifs ou négatifs, et que les résultats de ces substitutions ne soient, aucun, divisibles par n , l'équation proposée n'admettra aucune racine entière (*).

Car si α représente un nombre entier quelconque, positif ou négatif, le reste de la division de $f(\alpha)$ par n sera égal à l'un des restes des divisions par n des n nombres

$$f(a), f(a+1), f(a+2), \dots, f(a+n-1) \text{ (n}^\circ \text{ 5)};$$

or, d'après l'hypothèse, aucun de ces restes n'est nul, donc $f(\alpha)$ est égal à un multiple quelconque de n , augmenté d'un nombre plus petit que n et autre que zéro, par con-

(*) « On voit en général que lorsque X est de la forme

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots,$$

A , B , C , etc., étant entiers et n entier et positif, l'équation

$$X = 0$$

n'aura aucune racine rationnelle, s'il arrive que pour un certain module la congruence $X \equiv 0$ ne soit pas satisfaite. » (*Recherches arithmétiques*, section I, n^o 11.)

séquent $f(\alpha)$ ne peut être nul. Ainsi l'équation proposée n'admettra pour racine aucun nombre entier.

De là, les remarques suivantes :

1°. *Quand le terme indépendant de l'inconnue d'une équation*

$$f(x) = 0,$$

à coefficients entiers, est un nombre impair et que la somme des coefficients des termes qui contiennent l'inconnue est un nombre pair, l'équation ne peut admettre pour racine aucun nombre entier.

Car les substitutions de 0, 1 à x donnent pour résultats deux nombres $f(0)$, $f(1)$ qui, par hypothèse, ne sont, aucun, divisibles par le nombre, 2, des substitutions; donc (n° 4) l'équation n'admet aucune racine entière.

Comme exemple, considérons l'équation

$$x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 12x - 75 = 0,$$

dont le dernier terme -75 est impair. La somme des coefficients des termes dépendants de x est le nombre pair -16 ; donc l'équation n'aura aucune racine entière.

On sait d'ailleurs qu'elle ne peut admettre de racines fractionnaires puisque le coefficient de son premier terme est l'unité; par conséquent, ses racines réelles sont incommensurables.

2°. *Si les résultats des substitutions de $-1, 0, +1$ à l'inconnue x dans le premier membre d'une équation*

$$f(x) = 0,$$

à coefficients entiers, ne sont, aucun, multiples de 3, l'équation n'admettra aucune racine entière.

C'est ce qui résulte de la proposition démontrée n° 4, en supposant $a = -1$ et $n = 3$.

Prenons pour exemple l'équation

$$2x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 3x - 80 = 0.$$

En remplaçant successivement x par $-1, 0, +1$, il

vient :

$$f(-1) = -94, \quad f(0) = -80, \quad f(1) = -82.$$

Aucun des nombres 94, 80, 82 n'est multiple de 3, donc l'équation proposée n'a pas de racine entière.

3°. Lorsque la somme des coefficients de tous les termes d'une équation

$$f(x) = 0,$$

à coefficients entiers, est un nombre impair, l'équation ne peut admettre pour racine aucun nombre impair.

En effet, le reste de la division de $f(1)$ par 2 est égal à l'unité, puisque, d'après l'hypothèse, la somme des coefficients de tous les termes de l'équation est un nombre impair. Il en résulte (n° 3) que si l'on divise par 2 les nombres $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$, etc., $f(-1)$, $f(-3)$, $f(-5)$, etc., les restes des divisions seront constamment égaux à l'unité. De sorte que si l'on remplace x par un nombre impair quelconque, dans $f(x)$, le résultat de la substitution sera lui-même un nombre impair. Donc l'équation n'admettra pour racine aucun nombre impair.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^4 - 40x^3 + 32x^2 - 18x - 90 = 0,$$

dans laquelle la somme des coefficients est le nombre impair -115 . Les diviseurs impairs 3, 5, 9, 15, 45 du dernier terme ne peuvent être racines de l'équation.

G.

Note. Cette élucidation de Gauss renferme la solution de la question 345 (p. 383). En 1812, M. Piobert, alors élève au lycée Napoléon, classe de M. Dinet, a énoncé ce théorème : Lorsque la somme des coefficients est impaire, la racine ne peut être paire. Prochainement plusieurs démonstrations directes. T.M.