A. VACHETTE

Convexité de l'ellipse et de la parabole définies par la propriété focale de la tangente

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 455-457

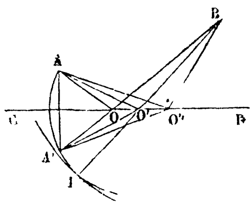
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__455_0>

CONVEXITÉ DE L'ELLIPSE ET DE LA PARABOLE DÉFINIES PAR LA PROPRIÉTÉ FOCALE DE LA TANGENTE;

PAR M. A. VACHETTE.

1. Un polygone plan est convexe s'il est tout entier à droite ou à gauche de la direction prolongée d'un quelconque de ses côtés : il en résulte que son périmètre ne peut être rencontré par une droite en plus de deux points, propriété caractéristique de la convexité. Une courbe plane, limite des polygones infinitésimaux qu'on peut lui inscrire, est convexe dans les mêmes conditions.

2. Le plus court chemin brisé de A en B, dont le sommet soit sur CD, a pour sommet le point O obtenu en



joignant à B le point A', symétrique de A par rapport à CD; tout autre chemin AO' B est plus long, car AO' + O' B ou A' O' + O' B est plus long que AO + OB ou A' OB.

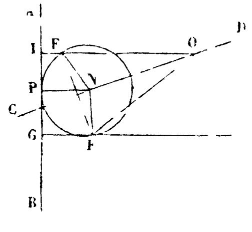
De part et d'autre du point O, il ne peut y avoir que deux chemins brisés égaux; du même côté que O', AO'' + O''B ou A' O'' + O'' B est plus grand ou plus petit que AO' + O' B ou A' O' + O' B; de l'autre côté du point O, il ne pourra exister qu'un seul chemin brisé égal à AO'B. Si la somme $AO' + O'B = 2a$ est donnée et plus grande que AOB, le point O' est le centre d'une circonférence passant par les deux points A et A' et tangente à la circonférence BI décrite du point B comme centre avec le rayon $2a$. Le problème est possible et donne deux solutions : il est résolu au III^e livre de la *Géométrie* de M. Blanchet.

Au point O, les droites AO et BO font des angles égaux avec CD.

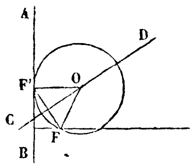
3. Supposons que A et B soient les deux foyers d'une ellipse dont le grand axe est $2a$; si le chemin minimum AOB est plus petit que $2a$, CD est une sécante qui ne coupe l'ellipse qu'en deux points; s'il est égal à $2a$, CD est une tangente n'ayant que le point O commun avec l'ellipse, et on voit que la tangente fait au point de contact des angles égaux avec les rayons vecteurs; s'il est plus grand que $2a$, CD est extérieure à l'ellipse.

Tout ce qui précède s'applique, sans aucun changement, au cas où la droite CD rencontre en O la droite des foyers A et B.

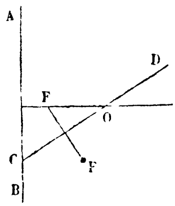
4. Supposons une parabole qui ait pour foyer le point F et pour directrice la droite AB, et examinons les relations de position d'une droite CD et de la courbe. Si le



point F′, symétrique de F par rapport à CD, est du même côté de AB que le point F, en menant F′O parallèle à l'axe FG, on détermine sur CD l'intersection O, point plus rapproché du foyer que de la directrice, car on a OF ou OF′ $<$ OI. On peut alors trouver sur CD deux points seulement qui soient à égale distance du foyer et de la directrice; l'un de ces points, N, est le centre d'une circonférence passant par les deux points F et F′ et tangente à la droite AB. Le problème est possible et donne deux solutions; il est aussi résolu au IIIe livre de l'ouvrage de M. Blanchet. La droite CD est une sécante qui ne coupe la parabole qu'en deux points. Si le point F′ est sur AB, le point O est lui-même le centre de la circonférence; il n'y a qu'une solution; CD est une



tangente qui fait au point de contact O des angles égaux avec le rayon vecteur et une parallèle à l'axe. Si le point F′ est de l'autre côté de AB par rapport au point F, le problème devient impossible et la droite CD est extérieure à la parabole.



Si la droite CD rencontre l'axe au delà du point F en O, le point F′ occupe la première des trois positions que nous avons examinées et CD est nécessairement sécante.

Note. Ceci revient à ce problème : Le centre, le foyer et la directrice d'une conique et une droite étant donnés, trouver l'intersection de la droite et de la conique sans la décrire. La propriété fondamentale de la directrice fournit une solution immédiate.

Tm.