BRIOSCHI

Solution de la question 294

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 459-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__459_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 294

(voir t. XIII, p. 305);

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'université de Pavie.

Soient P_1, P_2, P_3,..., P_n, n points matériels d'égales masses; G_2 le centre de gravité de P_1 et P_2; G_3 le centre de gravité de P_3 et de la masse $P_1 + P_2$ posée en G_2; G_4 le centre de gravité de P_4 et de $P_1 + P_2 + P_3$ posées en G_3, et ainsi de suite; de sorte que G_n est le centre de gravité de P_n et de P_{n-1}; G_n est indépendant de la manière dont on prend les masses; désignons par $A_{(i)}$ la distance de G_{i-1} à P_i, la quantité

$$\frac{1}{2}(A_2)^2 + \frac{2}{3}(A_3)^2 + \frac{3}{4}(A_4)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right) A_n^2$$

est constante, dans quelque ordre qu'on prenne les masses. (STEINER.)

Observation. G_1 est la même chose que P_1 : ainsi A_2 est la distance de P_1 à P_2.

Soient x_r, y_r, z_r les coordonnées rectangulaires du point P_r; α_r, β_r, γ_r celles du point G_r. On a

$$\alpha_r = \frac{1}{r}\sum_1^r{}_s\, x_s \text{ (*)}, \quad \beta_r = \frac{1}{r}\sum_1^r{}_s\, y_s, \quad \gamma_r = \frac{1}{r}\sum_1^r{}_s\, z_s,$$

(*) $\sum_1^r{}_s$ signifie qu'il faut donner à s toutes les valeurs de la suite $1, 2, 3, \ldots, r$. TM.

et

$$A_r^2 = (\alpha_{r-1} - x_r)^2 + (\beta_{r-1} - y_r)^2 + (\gamma_{r-1} - z_r)^2.$$

En substituant les valeurs ci-dessus, on aura

$$(r-1)^2 A_r^2 = \left[\sum_1^{r-1}{}_s x_s - (r-1)x_r\right]^2 + \left[\sum_1^{r-1}{}_s y_s - (r-1)y_r\right]^2$$

$$+ \left[\sum_1^{r-1}{}_s z_s - (r-1)z_r\right]^2.$$

Mais

$$\left[\sum_1^{r-1}{}_s x_s - (r-1)x_r\right]^2$$

$$= (r-1)\sum_1^{r-1}{}_s (x_s - x_r)^2 - \frac{1}{2}\sum_1^{r-1}{}_i \sum_1^{r-1}{}_j (x_i - x_j)^2;$$

par conséquent, si l'on suppose

$$\left[\sum_1^{r-1}{}_s x_s - (r-1)x_r\right]^2 = (r-1)^2 \delta_r^2,$$

on a

$$a_2\delta_2^2 + a_3\delta_3^2 + \ldots + a_n\delta_n^2 = \sum_1^{n}{}_i \alpha_i \sum_1^{i-1}{}_j (x_i - x_j)^2$$

où

$$(1)\quad \alpha_i = \frac{1}{i-1}a_i - \frac{1}{i^2}a_{i+1} - \frac{1}{(i+1)^2}a_{i+2} - \ldots - \frac{1}{(n-1)^2}a_n.$$

On en déduit tout de suite que

$$\alpha_2 A_2^2 + a_3 A_3^2 + \ldots + a_n A_n^2 = \sum_i^{n} {}_1 \alpha_i \sum_j^{i-1} {}_1 \delta_{i,j}^2,$$

où $\delta_{i,j}$ est la distance entre les points P_i, P_j. Le premier membre de cette équation se réduira à une constante dans quelque ordre qu'on prenne les masses, en supposant

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n;$$

or l'équation (1) et ses analogues nous donnent

$$a_i = (i-1)\,a_i + \frac{i-1}{i}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} + \ldots + \alpha_n);$$

par conséquent, si l'on fait

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = m,$$

on a

$$a_i = \frac{i-1}{i}\,mn$$

et

$$\frac{1}{2}A_2^2 + \frac{2}{3}A_3^2 + \frac{3}{4}A_4^2 + \ldots + \frac{n-1}{n}A_n^2 = \frac{1}{2n}\sum_i^{n} {}_1 \sum_j^{n} {}_1 \delta_{i,j}^2.$$

Théorème. Il est impossible de trouver quatre carrés tels, que la somme de trois quelconques moins le quatrième fasse un carré. (EULER.)

Théorème. ABC, triangle sphérique; O, centre de la sphère; V_1, volume du parallélipipède qui a pour arêtes OA′, OB′, OC′; A′, B′, C′ sont les milieux des côtés du triangle. S étant l'aire du triangle, on a $V = \sin\frac{1}{2}S$.

(CORNÉLIUS KEOGH.)
