COMBESCURE

Solution de la question 308

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 46-50

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__46_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 308;

PAR M. COMBESCURE,
Professeur au lycée de Bourges.

Inscrire dans un arc de section conique trois cordes consécutives formant trois segments équivalents.

(CHASLES.)

1°. *Parabole*. L'équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet étant

$$y^2 = 2px,$$

un segment correspondant aux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) aura pour expression

$$\frac{2}{3}x_2y_2 - \frac{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}{2} - \frac{2}{3}x_1y_1$$

ou

$$\frac{1}{6}(x_2y_2 - x_1y_1) + \frac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2),$$

ou, à cause de l'équation de la parabole,

$$\frac{1}{4p}\left\{\frac{y_2^3 - y_1^3}{3} + y_1^2y_2 - y_2y_1^2\right\}$$
$$= \frac{(y_2 - y_1)}{4p}\left\{\frac{y_2^2 + y_1y_2 + y_1^2)}{3} - y_1y_2\right\} = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}.$$

Donc si l'on veut inscrire dans un arc de parabole n cordes successives donnant lieu à n segments égaux, il suffira de diviser la partie $y_{n+1}-y$ de l'axe des y, qui représente la projection de l'arc, en n parties égales, et de mener des parallèles à l'axe par les points de division. La jonction successive des points où ces parallèles coupent la parabole donnera lieu aux segments demandés.

2°. *Hyperbole.* On peut se borner à l'hyperbole équilatère, sauf à transporter la solution à une hyperbole quelconque au moyen d'une projection cylindrique. Soit donc

$$xy = a^2$$

l'équation d'une pareille hyperbole. Un segment a pour mesure

$$\frac{(x_2 - x_1)}{2}(y_2 + y_1) - a^2 \log \frac{x_2}{x_1},$$

x_1, y_1, x_2, y_2 désignant les coordonnées des extrémités de l'arc. D'après l'équation de l'hyperbole, cette expression peut s'écrire

$$a^2 \left\{ \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1 x_2} - \log \frac{x_2}{x_1} \right\}$$

ou

$$a^2 \left\{ \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} - \log \frac{x_2}{x_1} \right\}.$$

Donc, si l'on considère n segments successifs et que l'on pose

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \ldots = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{z}{m},$$

d'où

$$z^m - m^n \frac{x_{n+1}}{x_1} = 0,$$

tous les segments dont il s'agit seront équivalents. On voit que la division d'un arc en n parties répondant à n segments équivalents, revient à l'insertion de n moyens proportionnels entre les abscisses extrêmes x_1 et x_{n+1}. On reconnaît d'ailleurs tout de suite, sur la figure, que le mode de division est unique. Dans le cas de $n = 3$, en écrivant x pour z, on aura à résoudre l'équation

$$x^3 = m^3 \frac{x_4}{x_1};$$

ou, en posant

$$\frac{m^2 x_4}{x_1} = a^2,$$

à chercher l'intersection de la parabole

$$x^2 = my$$

et de l'hyperbole donnée

$$xy = a^2.$$

Quant à m, on prendra la quatrième proportionnelle

$$a_1 = \frac{a x_1}{x_4},$$

puis la moyenne proportionnelle

$$m^2 = a a_1$$

Si α désigne l'abscisse du point d'intersection de la parabole auxiliaire avec l'hyperbole donnée, on aura par des quatrièmes proportionnelles,

$$x_2 = \frac{\alpha x_1}{m}, \quad x_3 = \frac{\alpha x_2}{m}.$$

3°. *Ellipse.* L'équation de la courbe étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

si l'on décrit un cercle sur le grand axe comme diamètre, les ordonnées Y_1, Y_2 qui répondent sur ce cercle aux abscisses x_1, x_2 des points (x_1, y_1), (x_2, y_2) de l'ellipse déterminent avec l'axe du cercle correspondant et l'axe des x une aire qui est l'aire elliptique homologue dans le rapport de a à b. En désignant par φ_1, φ_2 les angles que les rayons du cercle relatifs aux deux extrémités de l'arc circulaire font avec l'axe des y, l'aire elliptique dont il s'agit aura donc pour expression

$$\frac{b}{a}\left[a^2(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{a^2}{2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{Y_2 + Y_1}{2}(x_2 - x_1)\right],$$

c'est-à-dire

$$ab\left[(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right] + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)(x_2 - x_1).$$

Le segment elliptique a donc pour expression de sa mesure

$$ab\left[(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right].$$

Donc, si l'on veut diviser un arc d'ellipse en n parties telles, que les segments correspondants soient égaux, il suffira de prendre, attendu que le mode de division est unique,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = \ldots = \varphi_{n+1} - \varphi_n,$$

c'est-à-dire qu'il faudra diviser en n parties égales l'arc de cercle déterminé, comme il a été dit, par les ordonnées extrêmes. Les perpendiculaires à l'axe des x menées par les points de division détermineront sur l'arc elliptique les points dont la jonction successive donnera la solution de la question. Dans le cas de $n = 3$, la trisection de l'angle peut se faire, comme on sait, de diverses manières par l'intersection de coniques. Je ne m'arrêterai pas là-dessus.