POUDRA

Solution géométrique de la question 296

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 58-60

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__58_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 296

(voir t XIV, p. 50),

PAR M. POUDRA.

Étant donnés sur un plan A sept points désignés par a, b, c, d, e, f, g et sur un autre plan A′ sept autres points a', b', c', d', e', f', g', correspondants respectivement aux premiers : on demande de trouver dans chacun de ces plans A et A′ un point P et P′ tels, que le faisceau formé par les sept rayons Pa, Pb, Pc, Pd, Pe, Pf, Pg soit homographique avec le faisceau formé de même par les sept rayons P′a', P′b', P′c', P′d', P′e', P′f', P′g'.

Considérons d'abord les six points a, b, c, d, e, f et les points respectivement correspondants a', b', c', d', e', f', et cherchons les lieux des points p et p' qui dans les deux plans A et A′ sont tels, que les six rayons pa, pb, pc, pd, pe, pf forment un faisceau homographique à celui des rayons $p'a'$, $p'b'$, $p'c'$, $p'd'$, $p'e'$, $p'f'$, ces lieux sont des courbes du troisième ordre passant chacune par les six points donnés, comme l'a démontré analytiquement M. Abadie (t. XIV, p. 142).

Transformons la figure A' en une autre figure homographique située sur le plan A et telle, qu'aux quatre points a', b', c', d' de cette figure correspondent les quatre points a, b, c, d de la première. Les deux autres points e', f' deviendront, dans cette transformation, deux points e'_1, f'_1 situés sur le plan A. Si l'on joint alors par des droites les deux points e et e'_1 et ceux f et f'_1, le point p_1 d'intersection de ces deux droites sera bien tel, que les six droites $p_1 a$, $p_1 b$, $p_1 c$, $p_1 d$, $p_1 e$, $p_1 f$ formeront un faisceau homographique avec celui qui est formé par les droites $p_1 a$, $p_1 b$, $p_1 c$, $p_1 d$, $p_1 e'_1$, $p_1 f'_1$ puisqu'ils sont superposés. A ce point p_1 de la figure A correspondra dans la figure A' un point p' qui sera donc un des points de la courbe cherchée. Or, comme on a deux couples de six points, on peut faire la transformation ci-dessus de quinze manières différentes. On aura donc ainsi quinze points de chacune des courbes cherchées et qui en outre passent respectivement par les six points donnés, ce qui fait en tout vingt et un points. Mais en nous aidant de ce principe que la courbe est du troisième ordre, il suffira d'en déterminer trois par cette méthode, ce qui, avec les six points donnés, formera neuf points avec lesquels on pourra construire chacune de ces courbes par une des belles méthodes données par M. Chasles.

On construira de même deux autres courbes du troisième ordre lieu des sommets des faisceaux homographiques passant par les six points a, b, c, d, e et g et par les points correspondants a', b', c', d', e', g'.

Les points d'intersection des deux courbes du troisième ordre situés dans le plan A et ceux respectifs dans le plan A' seront les points cherchés tels, que le faisceau passant par les sept points a, b, c, d, e, f, g de la figure A sera homographique à celui de la figure A' passant par les sept points respectifs a', b', c', d', e', f', g'.

Les deux courbes du troisième ordre de chaque plan ont déjà cinq points communs a, b, c, d, e et a', b', c', d', e' ; comme elles se coupent en neuf points, il n'en reste que quatre pour la solution de la question. Or comme d'après M. Chasles il ne doit y avoir que trois solutions, il faut qu'il en existe encore une étrangère à la question.