NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRIOSCHI

Sur les questions 301 et 302

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 61-62

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__61_0>

SUR LES QUESTIONS 301 ET 302

(voir t. XIV, p. 138);

PAR M. BRIOSCHI.

Soient

$$r = u = s = v = t = w = 0$$

les équations des côtés successifs d'un hexagone; en supposant que chaque point

$$\begin{array}{lcr} a_1 & \text{soit déterminé par} & r = v = 0, \\ a_2 & — & r = u = 0, \\ a_3 & — & u = s = 0, \\ a_4 & — & s = v = 0, \\ \vdots & & \vdots \\ a_9 & — & t = w = 0, \end{array}$$

et en choisissant convenablement les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, l'équation

$$\alpha rst + \beta uvt + \gamma rsw + \delta uvw = 0$$

représentera une ligne du troisième ordre qui passe par les neuf points $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$.

L'équation d'une conique C_i menée par les points a_1, a_2, a_3, a_4, a_i sera

$$C_i = (uv)_i rs - (rs)_i uv = 0,$$

$(rs)_i$ étant la valeur de rs correspondante au point a_i, et $(uv)_i$ la valeur correspondante de uv. Mais si le point a_i est situé sur la ligne du troisième ordre, on aura identiquement

$$(rs)_i(\alpha t_i + \gamma w_i) + (uv)_i(\beta t_i + \delta w_i) = 0,$$

et, par conséquent,

$$C_i = (\alpha t_i + \gamma w_i)\, rs + (\beta t_i + \delta w_i)\, uv = 0.$$

Le rapport anharmonique des polaires d'un point quelconque relativement aux coniques C_5, C_6, C_7, C_8 sera donc

$$\varphi = \frac{(w_7 t_6 - w_6 t_7)(w_6 t_8 - w_8 t_6)}{(w_5 t_7 - w_7 t_5)(w_8 t_5 - w_5 t_8)};$$

w_i est la valeur de w en y mettant les coordonnées du point a_i et ainsi des autres, évidemment égal au rapport anharmonique du faisceau que l'on obtient en joignant par des droites le point a_9 aux points a_5, a_6, a_7, a_8. En effet, la droite $(a_9\, a_i)$ est représentée par l'équation

$$w_i t - t_i v = 0.$$

On sait que le lieu géométrique du point a_9, déterminé par la propriété d'être le centre d'un faisceau de droites menées par quatre points dont le rapport anharmonique est donné, est une conique sur laquelle sont situés les quatre points. Soit

$$\varphi\,(a_5\, a_6\, a_7\, a_8) = 0$$

l'équation de cette conique. Analoguement on aura une seconde conique

$$\psi\,(a_4\, a_6\, a_7\, a_8) = 0,$$

sur laquelle sera situé le point a_9.

Le point a_9 sera, par conséquent, le quatrième point d'intersection de ces deux coniques dont les trois autres sont a_6, a_7, a_8.