

MICHAEL ROBERTS

**Sur une question d'algèbre relative à
deux équations cubiques**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 76-80

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__76_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE QUESTION D'ALGÈBRE RELATIVE A DEUX
ÉQUATIONS CUBIQUES ;**

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Etant données deux équations du troisième degré, savoir

(I) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ (racines $\alpha, \alpha', \alpha''$),

(II) $x^3 - p'x^2 + q'x - r' = 0$ (racines β, β', β''),

je vais discuter l'équation dont les racines sont les valeurs que prend la fonction

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta''.$$

Désignons cette fonction par z et posons

$$\begin{aligned} M &= p^2 q' + p'^2 q - 3qq', \\ N &= 2(p^3 r' + p'^3 r) - q(pqr' + p'q'r) + pp'qq' + 27rr', \\ \Delta &= 27r^2 + 4q^3 - 18pqr + 4p^3r - p^2q^2, \\ \Delta' &= 27r'^3 + 4q'^3 - 18p'q'r' + 4p'^3r' - p'^2q'^2 \end{aligned}$$

(Δ , Δ' sont les fonctions qu'on appelle aujourd'hui *discriminants* des équations données, et la condition $\Delta = 0$ exprime que l'équation (I) a deux racines égales) : l'équation dont il s'agit s'écrit sous la forme suivante :

$$(III) \quad \left(z^3 - pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}N \right)^2 - \frac{1}{4}\Delta\Delta' = 0.$$

Si l'équation (I) a deux racines égales, l'équation (III) a ses racines égales deux à deux, ce qui se vérifie aisément à priori; et si les équations données deviennent identiques, Δ égale Δ' , et l'équation (III) se décompose dans les suivantes :

$$z^3 - p^2z^2 + Mz - \frac{1}{2}(N + \Delta) = 0,$$

$$z^3 - p'^2z^2 + Mz - \frac{1}{2}(N - \Delta) = 0.$$

Les racines de la première sont

$$\alpha^2 + 2\alpha'\alpha'', \quad \alpha'^2 + 2\alpha\alpha'', \quad \alpha''^2 + 2\alpha\alpha',$$

ce qu'on peut faire voir en éliminant x entre l'équation (I) et la suivante :

$$x^3 - xz + 2r = 0.$$

Les racines de la seconde sont évidemment q deux fois et $p^2 - 2q$.

Nous tirons aussi par différentiation

$$\frac{d\Delta}{dr} \cdot \frac{d\Delta'}{dr'} = 4(27N - 18Mpp' + 4p^3p'^3),$$

et en représentant par Δ'' le discriminant de l'équation

$$(IV) \quad z^3 - Pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}N = 0,$$

nous avons

$$8 \frac{d\Delta''}{dN} = \frac{d\Delta}{dr} \cdot \frac{d\Delta'}{dr'},$$

ce qui exprime une relation entre les racines des dérivées des équations (I), (II), (IV).

En posant

$$z - \frac{Pp'}{3} = u,$$

l'équation (III) se transforme en

$$\left\{ \begin{array}{l} u^3 - \frac{u}{3}(p^2 - 3q)(p'^2 - 3q') \\ - \frac{1}{216} \frac{d\Delta}{dr} \cdot \frac{d\Delta'}{dr'} \end{array} \right\}^2 - \frac{1}{4} \Delta \Delta' = 0;$$

d'où nous tirons

$$27\Delta'' = \left(\frac{1}{64} \frac{d\Delta}{dr} \cdot \frac{d\Delta'}{dr'} \right) - 4(p - 3q)^3(p'^2 - 3q')^3,$$

mais on a

$$\left(\frac{d\Delta}{dr} \right)^2 - 108\Delta = 16(p' - 3q)^2 :$$

en sorte que

$$\Delta'' = \frac{1}{16} \left\{ \Delta \left(\frac{d\Delta'}{dr'} \right)^2 + \Delta' \left(\frac{d\Delta}{dr} \right)^2 - 108\Delta\Delta' \right\}.$$

Posons maintenant

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix}, \quad D_6 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix},$$

le produit P de ces six déterminants s'exprime d'une manière assez élégante. En effet, nous trouvons

$$16P = \Delta \left(\frac{d\Delta'}{dr'} \right)^2 - \Delta' \left(\frac{d\Delta}{dr} \right)^2,$$

ou bien encore

$$P = \Delta (p'^2 - 3q')^3 - \Delta' (p^2 - 3q)^3.$$

Si l'équation (III) n'a que deux racines égales, on a

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \left(\frac{p^2 - 3q}{p'^2 - 3q'} \right)^3.$$

Note du Rédacteur. Les six racines de l'équation (III) sont

$$\begin{aligned} & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'', \\ & \alpha\beta + \alpha'\beta'' + \alpha''\beta', \\ & \alpha\beta' + \alpha'\beta + \alpha''\beta'', \\ & \alpha\beta' + \alpha'\beta'' + \alpha''\beta, \\ & \alpha\beta'' + \alpha'\beta + \alpha''\beta', \\ & \alpha\beta'' + \alpha'\beta' + \alpha''\beta, \end{aligned}$$

et l'équation (III) s'obtient par la théorie des fonctions symétriques. Cette équation peut toujours se ramener au troisième degré, car on a

$$z^3 - pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}N \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta\Delta'} = 0.$$

(80)

Si

$$r = r' = 0,$$

on peut supposer

$$\alpha = \beta = 0;$$

l'équation (III) est alors relative à deux équations du second degré, et en supposant p, q, r des fonctions d'une variable y , on est amené à des propriétés géométriques des courbes du second et du troisième degré.