Nouvelles annales de mathématiques

PROUHET

Note sur l'aire du triangle sphérique, formule de Lhuilier

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 91-93

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__91_1>

NOTE SUR L'AIRE DU TRIANGLE SPHÉRIQUE,

Formule de Lhuilier;

PAR M. PROUHET.

1. Si l'on représente par $2S$ la surface d'un triangle sphérique, on pourra mettre les deux formules de Delambre

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}, \quad \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

sous la forme suivante :

$$(1)\qquad \frac{\sin\left(\frac{C}{2}-S\right)}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

$$(2)\qquad \frac{\cos\left(\frac{C}{2}-S\right)}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

2. On déduit de l'équation (1)

$$\frac{\sin\frac{C}{2}-\sin\left(\frac{C}{2}-S\right)}{\sin\frac{C}{2}+\sin\left(\frac{C}{2}-S\right)}=\frac{\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a+b}{2}},$$

ce qui, en changeant les sommes ou différences en produits, devient

$$(3)\qquad \frac{\tang\frac{S}{2}}{\tang\frac{C-S}{2}}=\tang p\tang\frac{p-c}{2}.$$

Par une transformation analogue, on déduit de l'équation (2) la suivante :

$$(4)\qquad \tang\frac{S}{2}\tang\frac{C-S}{2}=\tang\frac{p-a}{2}\tang\frac{p-b}{2}.$$

Multipliant les équations (3) et (4) membre à membre et extrayant la racine carrée du résultat, on obtient

$$(5)\quad \tang\frac{S}{2}=\sqrt{\tang\frac{p}{2}\tang\frac{p-a}{2}\tang\frac{p-b}{2}\tang\frac{p-c}{2}},$$

formule de Simon Lhuilier.

3. On peut encore écrire les équations (1) et (2) sous cette forme,

(6) $$\sin\frac{C}{2}\cos S - \cos\frac{C}{2}\sin S = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\sin\frac{C}{2},$$

(7) $$\cos\frac{C}{2}\sin S + \sin\frac{C}{2}\sin S = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\cos\frac{C}{2}.$$

En résolvant ces deux équations par rapport à $\cos S$ et à $\sin S$, on aura, après quelques transformations faciles,

(8) $$\cos S = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

(9) $$\sin S = \frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

4. Si l'on désigne par 2σ la surface du triangle supplémentaire et par $2S'$, $2S''$, $2S'''$ les aires des triangles formés d'un côté du triangle proposé et des prolongements des deux autres, on aura

(10) $$\tang\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{\tang\frac{S'}{2}\tang\frac{S''}{2}\tang\frac{S'''}{2}}{\tang\frac{S}{2}}}.$$