NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DE JONQUIÈRES

Solution géométrique de la question 280 (Chasles)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 99-102

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__99_0>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 280 (CHASLES);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

Il s'agit de prouver que si, par trois points en ligne droite de la branche infinie d'une courbe du troisième ordre, composée d'une telle branche et d'un ovale, on mène, respectivement, deux tangentes à l'ovale, les trois cordes de contact passent par un même point.

Je ferai voir, par la démonstration même, que ce théorème est susceptible d'un énoncé plus général.

Soient A, B, C les trois points en ligne droite pris sur la branche infinie; les trois cordes de contact sont pq, KL, FG.

Maclaurin démontre très-simplement, dans son *Traité des courbes du troisième ordre* (prop. XV, fin du corollaire), que si par chacun des trois points A, B, C on mène quatre tangentes à la courbe, toute droite qui joint deux quelconques des douze points de contact passe par l'un des dix autres, de telle sorte qu'en chacun des douze points de contact il y a toujours quatre cordes semblables qui viennent s'y croiser.

Par le point A passent les tangentes AF, AG à l'ovale; Af, Ag à la branche infinie.

Par le point B passent les tangentes BK, BL à l'ovale; Bk, Bl à la branche infinie.

Par le point C passent les tangentes CP, CQ à l'ovale; Cp, Cq à la branche infinie.

F, G, K, L, P, Q sont les points de contact sur l'ovale.

f, *g*, *k*, *l*, *p*, *q* sont les points de contact sur la branche infinie.

J'ajouterai que ce point de croisement est toujours le point de contact d'une tangente issue de celui des trois points A, B, C qui est étranger aux deux points de contact que réunit la corde en question. Ainsi, par exemple, les quatre cordes QG, PF, *fp*, *qg* qui joignent, deux à deux, les points de contact des tangentes issues des points A, C, viennent se couper au point de contact *k* de la tangente B*k* issue du troisième point B.

De même, le point de contact *f* de la tangente A*f* est le point de croisement des quatre cordes QL, PK, *ql*, *pk* qui joignent les points de contact relatifs aux points B, C.

De même encore, le point de contact *p* de la tangente C*p* issue du point C, est le point de croisement des quatre cordes LG, FK, *lg*, *fk* dont les extrémités sont les points de contact relatifs aux deux autres points A, B.

D'après cela, les triangles QLG, PKF dont les côtés homologues se coupent en *f*, *k*, *p* sur la droite *pf* sont *homologiques*. Donc (*Géométrie supérieure*, n° 365) leurs sommets homologues sont deux à deux sur trois droites concourantes en un même point O. Or ces trois droites PQ, LK, FG sont précisément les cordes de contact dont il s'agit dans l'énoncé de la question. Donc le théorème est démontré.

Considérons actuellement les deux triangles Q*lg*, P*kf*; ces triangles sont pareillement *homologiques* en vertu du *corollaire* déjà cité. Car les côtés *gl* et *kf* se coupent en *p*; les côtés Q*l*, P*k* se coupent en F; les côtés Q*g*, P*f* se coupent en K; et les trois points *p*, *k*, F sont en ligne droite. Donc les droites PQ, *kl*, *fg* qui joignent deux à deux les sommets homologues des deux triangles se croisent en un même point O′. Or, ces trois droites sont trois cordes de contact relatives aux trois points A, B, C dont deux sont prises sur la branche infinie et une sur l'ovale.

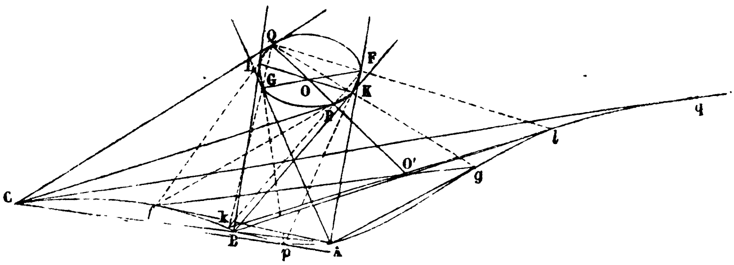
La comparaison des triangles qLg, pKf et, pareillement, celle des triangles qlG, Fkp donneraient lieu à une conclusion analogue, relativement aux deux autres permutations que l'on peut faire en prenant une corde de contact sur l'ovale et deux sur la branche infinie.

On a donc ce nouveau théorème.

Une courbe du troisième ordre étant composée d'un ovale et d'une branche infinie, si l'on prend trois points en ligne droite sur cette branche; que par l'un de ces trois points on mène deux tangentes à l'ovale, et que par chacun des deux autres on mène deux tangentes à la branche infinie, les trois cordes de contact ainsi déterminées passeront par un même point.

Remarque. Si les trois points A, B, C étaient pris sur les deux branches, savoir deux sur l'ovale et un sur la branche infinie, tels que Q, G, k, le théorème n'existerait plus; car par chacun des points Q, G de l'ovale on ne peut mener à la courbe aucune autre tangente que celle qui touche l'ovale en ce point même (et qui en représente deux superposées); il n'existe donc, dans ce cas, qu'une seule corde de contact, savoir celle qui est relative au point k, soit sur la branche infinie, soit sur l'ovale.

Quant à la proposition de Maclaurin, sur laquelle s'appuie la démonstration, elle résulte de considérations très-simples et purement géométriques, comme on le verra dans ma traduction du Traité de ce grand géomètre sur les courbes du troisième ordre, traduction que je n'ai d'ailleurs entreprise que pour faciliter aux jeunes gens la lecture de cet ouvrage remarquable, qui est aujourd'hui extrêmement rare en France et peut-être peu connu.


Q
L
G
O
F
K
P
O′
C
k
B
p
A
g
l
q