# Démonstration d'un théorème de M. Kronecker (question 373)

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 16 (1857), p. 292-293

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__292_0>

# DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. KRONECKER (QUESTION 373)

(voir p. 178);

PAR M. E. P***,
Professeur.

*Soit*

$$f_1(x) = 0, \quad (x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_m)$$

*une équation algébrique à coefficients entiers et le premier terme ayant pour coefficient l'unité; si les modules de toutes les racines sont égaux à l'unité, toutes les racines de cette équation sont des racines de l'unité.*

Pour le démontrer, je représente par

$$f_2(x) = 0, \quad (x_1^2,\ x_2^2,\ldots,\ x_m^2),$$
$$f_3(x) = 0, \quad (x_1^3,\ x_2^3,\ldots,\ x_m^3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'autres équations dont les racines sont respectivement celles de la proposée élevées à la deuxième, troisième, etc., puissance. Dans toutes ces équations, le premier coefficient est l'unité et tous les autres sont des nombres entiers limités, car chacun de ces coefficients est la somme d'un nombre fini de termes dont le module est l'unité, et l'on sait que le module d'une somme est inférieur à la somme des modules de ses parties.

Conséquemment, le nombre des combinaisons des valeurs de ces coefficients sera limité et l'on trouvera, parmi les équations ci-dessus, une au moins qui sera répétée un nombre infini de fois. Supposons alors que les équations

$$f_n(x)=0, \quad (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n),$$
$$f_p(x)=0, \quad (x_1^p, x_2, \ldots, x_m^p),$$
$$\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

aient les mêmes coefficients et, par suite, les mêmes racines. Il peut arriver que ces racines, rangées comme nous l'avons fait, suivant l'ordre croissant des indices, ne soient pas respectivement égales à celles qui occupent le même rang dans la première; alors les racines de $f_n(x)=0$, $f_p(x)=0$, etc., seront de certaines permutations des racines de $f_1(x)=0$. Mais comme le nombre de ces équations est infini, tandis que le nombre des permutations est fini, nous trouverons nécessairement deux équations

$$f_\alpha(x)=0, \quad (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_m^\alpha),$$
$$f_\beta(x)=0, \quad (x_1^\beta, x_2^\beta, \ldots, x_m^\beta),$$

qui appartiendront à la même permutation : par conséquent, on aura

$$x_1^\beta = x_1^\alpha, \quad x_2^\beta = x_2^\alpha, \quad \ldots, \quad x_m = x_m^\alpha,$$

d'où l'on conclut que les racines de l'équation donnée sont aussi racines de l'équation binôme

$$x^{\beta-\alpha}=1.$$

C. Q. F. D.

*Note du Rédacteur.* M. Kronecker a énoncé et démontré ce théorème dans le tome LIII, cahier 2 du *Journal* de Crelle. M. Prouhet et aussi M. Moutard sont parvenus chacun spontanément à la même démonstration que M. Kronecker. C'est par erreur qu'on lit à la page 178 le nom de M. Hermite.