NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MARCEL JOZON

Seconde solution d'une question proposée aux examens d'admission à l'École polytechnique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 430-433

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__430_0>

SECONDE SOLUTION D'UNE QUESTION

Proposée aux examens d'admission à l'Ecole Polytechnique

(voir page 376),

PAR M. MARCEL JOZON,
Élève du lycée Louis-le-Grand

Trouver le nombre des racines réelles qu'admet l'équation

$$x = A\sin x + B$$

pour chaque système de valeurs des coefficients A et B, et effectuer la séparation de toutes ces racines.

Application à l'équation $x = 3142 \sin x + 157$.

La valeur maximum de $\sin x$ étant 1, la valeur maximum de $A\sin x + B$ est $A + B$; de même la valeur minimum de ce binôme correspond à $\sin x = -1$ et est $-A + B$. (A est supposé positif. S'il ne l'était pas, on changerait les signes.) Il résulte de là : 1° que toutes les valeurs de x satisfaisant à l'équation sont comprises entre $-A + B$ et $+A + B$; 2° que le nombre des racines est impair, car pour toute valeur de x inférieure à $-A+B$, le premier membre de l'équation

$$x - A\sin x - B = 0$$

devient négatif, et, pour toute valeur de x supérieure à $A + B$, le premier membre de cette même équation devient positif.

On voit de plus que si deux valeurs x_1 et $x_1 + \pi$ comprises entre $-A + B$ et $+A + B$ sont telles que

$$\sin x_1 = \pm 1,$$

elles donnent des résultats de signes contraires (*) lorsqu'on les substitue à x dans le premier membre de l'équation

$$x - A\sin x - B = 0,$$

et que par conséquent elles comprennent une racine. De plus, dans cet intervalle de x_1 à $x_1 + \pi$, la dérivée $1 - A\cos x$ s'annule au plus une fois; il n'y a donc qu'une seule racine comprise entre x_1 et $x_1 + \pi$ (**).

Donc si l'on a la fois

$$\sin(-A + B) = \pm 1$$

et

$$\sin(A + B) = \pm 1 \text{ (***)}$$

il y aura autant de racines comprises entre $-A + B$ et $A + B$, qu'il y a de demi-circonférences dans la différence $2A$ de ces arcs.

Si $-A + B$ et $A + B$ ne vérifient l'équation ni l'un ni l'autre, le nombre des racines sera exactement $\frac{2A}{\pi}$.

Si $-A + B$ est racine, $A + B$ ne l'étant pas, le nombre des solutions est $\frac{2A}{\pi} + 1$. Enfin ce nombre est $\frac{2A}{2} + 2$, quand $-A + B$ et $+A + B$ sont racines.

Pour ramener le cas général à celui-là, on pose

$$-A + B = \frac{2n+1}{2}\pi - \alpha = C - \alpha,$$

la nombre α étant plus petit que π, et de même

$$A + B = \frac{2n'+1}{2}\pi + \beta = D + \beta.$$

(*) Car $\sin(x_1 + \pi) = -\sin x_1$. Tm.

(**) Car cette quantité ne peut dans cet intervalle passer du positif au négatif qu'une seule fois. Tm.

(***) Cela revient à $\sin x_1 = \pm 1$. Tm.

Le nombre des racines comprises entre C et D est $\left(\frac{D-C}{\pi}\right)$.

Maintenant si $\sin C = +1$, il y a une racine comprise entre $C-\alpha$ et C, car pour $x = C-\alpha$, $x - A\sin x - D$ devient négatif, et pour $x = C$ il est positif.

Si au contraire $\sin C = -1$, il n'y a pas de solutions comprises entre $C-\alpha$ et C.

On verrait de même que si $\sin D = -1$, il y a une racine comprise entre D et $D+\beta$, et que si $\sin D = +1$, il n'y en a pas. Le nombre des racines peut donc être

$$\frac{D-C}{\pi}, \quad \frac{D-C}{\pi}+1 \quad \text{ou} \quad \frac{D-C}{\pi}+2.$$

On a donc ainsi le nombre des racines. Quant à leur séparation, elle se trouve naturellement effectuée, puisque l'on sait qu'entre deux arcs $\frac{2n-1}{2}\pi$ et $\frac{2n+1}{2}\pi$ compris entre les limites extrêmes $-A+B$ et $A+B$, il y a une racine de l'équation et une seule.

Application à l'équation $x = 3142\sin x + 157$.

Ici

$$A = 3142 = 1000\pi, \quad B = 157 = 50\pi;$$

donc

$$-A+B = -950\pi = \left(-950+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{\pi}{2}$$

et

$$A+B = 1050\pi = \left(1050-\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Il y aura donc déjà $1050-\frac{1}{2}+950-\frac{1}{2}$ ou 1999 racines comprises entre $\left(-950+\frac{1}{2}\right)\pi$ et $\left(1050-\frac{1}{2}\right)\pi$.

De plus, le sinus de $\left(-950+\frac{1}{2}\right)\pi$ étant positif, il y a une racine entre -950π et $\left(-950+\frac{1}{2}\right)\pi$, et de même, le sinus de $\left(1050-\frac{1}{2}\right)\pi$ étant négatif, il y a une racine comprise entre $\left(1050-\frac{1}{2}\right)\pi$ et 1050π.

Il y aura donc en tout $1999+2$ ou 2001 racines, connues à une demi-circonférence près, à l'exception de la première et de la dernière qui sont connues à un quart de circonférence près.

Note du Rédacteur. La première solution (p. 376) est usitée dans les services publics, lorsqu'on n'a besoin de connaître approximativement que quelques racines; le procédé graphique est alors plus expéditif que le calcul.