

EUGÈNE ROUCHÉ

**Note sur la théorie des racines égales
et sur la question 332**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 66-71

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__66_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur la théorie des racines égales et sur la question 532 (*)

(voir page 26),

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ,

Ancien élève de l'École Polytechnique

- - -

1. On doit à Lagrange le procédé indiqué dans tous les

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. III, p. 51, 1844; ROGER

Traité d'Algèbre pour ramener la résolution d'une équation qui a des racines égales à celle de plusieurs autres équations de degrés moindres, dans lesquelles chaque racine n'entre qu'une seule fois. M. Ostrogradski a énoncé dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (19 mai 1856) deux propositions remarquables qui conduisent à deux solutions nouvelles et élégantes du même problème.

Nous nous proposons, dans cette Note, de démontrer et d'appliquer ces deux théorèmes, et de rectifier l'énoncé de la question 332.

2. THÉORÈME I. Soient X, P, Q_1, R_1 un polynôme entier de la variable x ; le plus grand commun diviseur à ce polynôme et à sa dérivée X' ; et les quotients

$$\frac{X}{P}, \quad \frac{X'}{P}.$$

Concevons le premier membre de l'équation

$$X = 0$$

décomposé en facteurs correspondants à ses racines, et désignons par q_1, q_2, q_3, q_4 les produits des facteurs de chaque degré de multiplicité pris chacun une fois; nous aurons successivement

$$X = q_1 q_2^2 q_3^3 q_4^4,$$

$$X' = X \left(\frac{q_1'}{q_1} + 2 \frac{q_2'}{q_2} + 3 \frac{q_3'}{q_3} + 4 \frac{q_4'}{q_4} \right),$$

$$P = q_1^2 q_2^3 q_3^4,$$

$$Q_1 = q_1 q_2 q_3 q_4,$$

$$Q_1' = Q_1 \left(\frac{q_1'}{q_1} + \frac{q_2'}{q_2} + \frac{q_3'}{q_3} + \frac{q_4'}{q_4} \right),$$

$$R_1 = Q_1 \left(\frac{q_1'}{q_1} + 2 \frac{q_2'}{q_2} + 3 \frac{q_3'}{q_3} + 4 \frac{q_4'}{q_4} \right),$$

$$R_1 - Q_1' = Q_1 \left(\frac{q_2'}{q_2} + 2 \frac{q_3'}{q_3} + 3 \frac{q_4'}{q_4} \right).$$

Donc le plus grand diviseur commun aux polynômes Q_1 et $R_1 - Q'_1$ est précisément le produit q_1 des facteurs simples du polynôme X .

De plus, si l'on désigne par Q_2 et R_2 les quotients

$$\frac{Q_1}{q_1}, \quad \frac{R_1 - Q'_1}{q_1},$$

on a

$$Q_2 = q_2 q_3 q_4,$$

$$Q'_2 = Q_2 \left(\frac{q'_2}{q_2} + \frac{q'_3}{q_3} + \frac{q'_4}{q_4} \right),$$

$$R_2 = Q_2 \left(\frac{q'_2}{q_2} + 2 \frac{q'_3}{q_3} + 3 \frac{q'_4}{q_4} \right),$$

$$R_2 - Q'_2 = Q_2 \left(\frac{q'_3}{q_3} + 2 \frac{q'_4}{q_4} \right).$$

Donc le plus grand diviseur commun aux polynômes Q_2 et $R_2 - Q'_2$ est le produit q_2 des facteurs doubles de X .

Et l'on verrait de même que si l'on désigne par Q_3 et R_3 les quotients

$$\frac{Q_2}{q_2}, \quad \frac{R_2 - Q'_2}{q_2},$$

le plus grand diviseur commun aux polynômes Q_3 et $R_3 - Q'_3$ est le produit q_3 des facteurs triples de X .

Ainsi de suite.

3. Application numérique.

$$X = x^5 - 7x^4 - 2x^3 + 118x^2 - 259x - 83x^0 \\ + 612x^1 - 108x - 432,$$

$$X' = 8x^4 - 49x^3 - 12x^2 + 590x^1 - 1036x^0 \\ - 249x^2 + 1224x - 108, \quad \}$$

$$P = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18,$$

$$Q_1 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24,$$

$$Q'_1 = 4x^3 - 30x + 10,$$

$$R_1 = 8x^3 + 7x^2 - 67x + 6,$$

$$R_1 - Q'_1 = 4x^3 + 7x^2 - 37x - 4,$$

$$q_1 = x + 4,$$

$$Q_2 = x^3 - 4x^2 + x + 6,$$

$$Q'_2 = 3x^2 - 8x + 1,$$

$$R_2 = 4x^2 - 9x - 1,$$

$$R_2 - Q'_2 = x^2 - x - 2,$$

$$q_2 = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2),$$

$$q_3 = x - 3;$$

donc

$$X = (x + 4)(x^2 - x - 2)(x - 3).$$

4. En opérant ainsi, on détermine successivement les divers produits q_1, q_2, q_3, q_4 , à l'aide de ceux qui précèdent. La proposition suivante permet d'obtenir immédiatement le produit des facteurs d'un degré quelconque de multiplicité.

•
THÉORÈME II. X, P, Q_1, R_1 ayant la même signification que ci-dessus, le plus grand diviseur commun aux polynômes Q_1 et $R_1 - hQ'_1$ est précisément le produit q_k des premières puissances des facteurs de X dont le degré de multiplicité est k .

En effet, on a successivement

$$X = q_1 q_2^2 q_3^4 \cdots q_{n-1} \cdots q_n^n,$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}' = \mathbf{X} \sum_1^n k \frac{q'_k}{q_k}, \\ \mathbf{P} = q_1 q_2^2 \dots q_k^{k-1} \dots q_n^{n-1}, \\ \mathbf{Q}_1 = q_1 q_2 q_3 \dots q_k \dots q_n, \\ \mathbf{Q}'_1 = \mathbf{Q}_1 \sum_1^n \frac{q'_k}{q_k}, \\ \mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_1 \sum_1^n k \frac{q'_k}{q_k}, \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \mathbf{R}_1 - k \mathbf{Q}'_1 = \mathbf{Q}_1 \left\{ \begin{array}{l} (1-k) \frac{q'_1}{q_1} + (2-k) \frac{q'_2}{q_2} + \dots \\ + (\overline{k-1-k}) \frac{q'_{k-1}}{q_{k-1}} \\ + (\overline{k+1-k}) \frac{q'_{k+1}}{q_{k+1}} + \dots \\ + (n-k) \frac{q'_n}{q_n} \end{array} \right\},$$

et il suffit de comparer les relations (1) et (2) pour voir que le plus grand diviseur commun à \mathbf{Q}_1 et à $\mathbf{R}_1 - k \mathbf{Q}'_1$ est q_1 .

5. *Application numérique.* Mêmes valeurs de \mathbf{X} , \mathbf{X}' , \mathbf{P} , \mathbf{Q}'_1 , \mathbf{R}_1 qu'au n° 3.

$$\mathbf{Q}_1 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24,$$

$$\mathbf{R}_1 - \mathbf{Q}'_1 = 4x^3 + 7x^2 - 37x - 4,$$

$$\mathbf{R}_1 - 2\mathbf{Q}'_1 = 7x^2 - 7x - 14,$$

$$\mathbf{R}_1 - 3\mathbf{Q}'_1 = -4x^3 + 7x^2 + 23x - 24,$$

$$q_1 = x + 4,$$

$$q_2 = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2),$$

$$q_3 = x - 3.$$

6. L'énoncé de la question 332 (voir t. XV, p. 243) doit être rectifié.

(71)

Mettons, en effet, les polynômes M et N sous la forme

$$M = M_1 M_2^2 \dots M_k^k \dots M_m^m,$$

$$N = N_1 N_2^2 \dots N_n^n.$$

D'après le théorème II, le plus grand diviseur commun aux polynômes Q_1 et $R_1 - kQ_1$ est $M_k N_1$; il n'est donc égal à N que dans le cas où N est le produit des puissances premières des facteurs de X dont le degré de multiplicité est k, et M le produit de tous les autres facteurs de X. Ainsi modifiée, la question 332 ne diffère pas du théorème II.

•