

CREMONA

**Solution analytique de la question
344 (Mannheim)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 79-82

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__79_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 544 (MANNHEIM)

(voir t. XV, p. 383),

PAR M. CREMONA,

Professeur à l'université de Padoue.

Soient x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées des points A, O, celles des points B, C seront de la forme :

$$\begin{aligned}x_3 &= x_1 + \lambda h, & y_3 &= y_1 + \lambda h, \\x_4 &= x_1 + \mu m, & y_4 &= y_1 + \mu n,\end{aligned}$$

h, k, l, m sont des quantités données, λ, μ deux indéterminées; donc

$$2ABO = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ h & h \end{vmatrix},$$

et analogiquement

$$2AOC = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ m & n \end{vmatrix}.$$

Il s'ensuit

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\text{ABO}} + \frac{1}{\text{AOC}} \right) = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \lambda h - \mu m & \lambda k - \mu n \end{vmatrix}}{\lambda \mu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ h & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ m & n \end{vmatrix}};$$

mais les points B, C, O étant en ligne droite, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \lambda h - \mu m & \lambda k - \mu n \end{vmatrix} - \lambda \mu \begin{vmatrix} h & k \\ n & m \end{vmatrix} = 0,$$

par conséquent,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\text{ABO}} + \frac{1}{\text{AOC}} \right) = \frac{\begin{vmatrix} h & k \\ m & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ h & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ m & n \end{vmatrix}};$$

quantité indépendante de λ, μ . Donc, etc.

Théorème analogue dans l'espace.

Par un point O situé dans l'intérieur d'un triangle trièdre de sommet A, on mène un plan qui coupe les arêtes du trièdre dans les points B, C, D. Soient v, v_2, v_3 les valeurs des trois pyramides AOCD, AODB, AOBC; je dis que la somme

$$\sqrt{\frac{v_1}{v_2 v_3}} + \sqrt{\frac{v_2}{v_1 v_3}} + \sqrt{\frac{v_3}{v_1 v_2}}$$

est constante, de quelque manière qu'on mène le plan sécant.

Soient $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_3, y_3, z_3$ les coor-

(81)

données des cinq points A, O, B, C, D; $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ sont des quantités données ainsi que les α, β, γ on aura

$$\frac{x_3 - x_1}{\alpha_1} = \frac{y_3 - y_1}{\beta_1} = \frac{z_3 - z_1}{\gamma_1} = \lambda,$$

$$\frac{x_4 - x_1}{\alpha_2} = \frac{y_4 - y_1}{\beta_2} = \frac{z_4 - z_1}{\gamma_2} = \mu,$$

$$\frac{x_5 - x_1}{\alpha_3} = \frac{y_5 - y_1}{\beta_3} = \frac{z_5 - z_1}{\gamma_3} = \nu,$$

donc

$$6v_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = \mu\nu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \mu\nu A,$$

et par analogie

$$6v_2 = \nu\lambda \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = \nu\lambda B,$$

$$6v_3 = \lambda\mu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \lambda\mu C,$$

A, B, C sont des quantités connues; d'où

$$\frac{1}{6^{\frac{1}{2}}} \frac{v_1 + v_2 + v_3}{\sqrt{v_1 v_2 v_3}} = \frac{\mu\nu A + \nu\lambda B + \lambda\mu C}{\lambda\mu\nu \sqrt{ABC}}.$$

Mais les points O, A, B, C étant dans un même plan, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0,$$

(82)

remplaçant x_3 par $\lambda\alpha_1 + x_1$, y_3 par $\lambda\beta_1 + y_1$, z_3 par $\lambda\gamma_1 + z_1$, etc., on obtient

$$\mu\nu A + \nu\lambda B + \lambda\mu C = \lambda\mu\nu \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu D,$$

donc

$$\frac{1}{6^{\frac{1}{2}}} \left(\sqrt{\frac{e_1}{e_2 e_3}} + \sqrt{\frac{e_2}{e_3 e_1}} + \sqrt{\frac{e_3}{e_1 e_2}} \right) = \frac{D}{\sqrt{ABC}},$$

quantité indépendante de λ, μ, ν .

C'est ce qu'il fallait prouver.