NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE ROCHAS

GRELLEY

Solution de la question 345

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 9-10

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__9_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 345

(voir tome XV, page 383),

PAR M. DE ROCHAS,
Élève à l'école préparatoire de Sainte-Barbe (classe de M. Gerono),

ET M. GRELLEY,
Élève à la même ecole (classe de M. Vieille.)

$f(x)=0$ est une équation à coefficients entiers; si $f(0)$ et $f(1)$ sont des nombres impairs, l'équation n'a pas de racines entières. (GAUSS.)

Le polynôme $f(x)$ étant un polynôme algébrique entier, pourra se mettre sous la forme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

m étant un nombre entier. Nous aurons alors

$$f(0) = A_m$$

et

$$f(1) = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{m-1} + A_m,$$

$f(0)$ et $f(1)$ étant, par hypothèse, deux nombres impairs.

Supposons que l'équation

$$f(x)=0$$

admette une racine entière a, elle sera paire ou impaire. Dans le premier cas, chacun des m premiers termes de $f(a)$ étant pair, puisque les coefficients sont entiers, leur somme le sera aussi, et, par snite, cette somme augmentée d'un nombre impair A_m, ne pourra pas devenir nulle.

Dans le second cas, nous pourrons remarquer que les puissances du nombre a seront toutes impaires et que, par suite, chacun des m premiers termes de $f(a)$ étant de même parité que son coefficient, la somme de ces termes sera de même parité que la somme des m premiers coefficients. Mais cette somme est égale à $f(1) - f(0)$: elle est donc paire; par conséquent, la somme des m premiers termes de $f(a)$ sera paire comme dans le cas précédent et ne pourra pas être annulée par l'addition d'un nombre impair A_m.

Le nombre a, ne pouvant être ni pair ni impair, ne sera pas entier. C. Q. F. D.